

# VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

## विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 34

October 1991

No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा  
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च  
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

## विज्ञान परिषद् इलाहाबाद

## विषय-सूची

1. बहुचर A-फलन के लिए एक प्रसार सूत्र आर० के० मक्केता तथा यशवन्त सिंह ...	197
2. सिग्निटीट के लोगों में $Rh^{-ve}$ घटनाओं की गणना चतुर्भुज साहू ...	207
3. अवशिष्ट $Cd \times Pb$ अन्योन्य क्रिया का उपज तथा भारी धातुओं के अवशोषण पर प्रभाव जिवगोपाल मिश्र तथा प्रमोद कुमार शुक्ल ...	213
4. शुद्ध नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव का अध्ययन : काल प्रभावन का प्रभाव जगदीश प्रसाद ...	221
5. जीवाणु द्वारा जल का प्रकाशअपघटनी विखण्डन कृष्ण बहादुर, एम० रंगनाथकी तथा शैलजीत सिंह ...	227
6. बेमेल फलनों तथा त्रैकोन्मी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन के द्वि-विमीय प्रसार का एक नवीन वर्ग एम० डी० बाजपेयी ...	233
7. 2-द्वरीक समष्टि में संकुचनीय पुनरावृत्तिकधारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिन्दु विजयेन्द्र कुमार, सुचरिता रंगनाथन तथा श्यामलाल सिंह ...	237
8. बहुचर H-फलन के प्राचलों के प्रति समाकलन अशोक रोंधे ...	247
9. 2-द्वरीक समष्टि पर एक सामान्य स्थिर बिन्दु प्रमेय एन० एस० सिमोनिया ..	255
10. दो चरों वाले H-फलन में युक्त एक द्विगुण समाकल बी० सी० नायर तथा एम० आर० प्रसन्नाकुमारी ...	259
11. गैसीय वायलर का संरक्षण : इसका रासायनिक उपचार मीणा भर्तिया तथा यू० एस० चतुर्वेदी ...	267

## बहुचर A-फलन के लिए एक प्रसार सूत्र

आर० के० सक्सेना तथा यशवन्त सिंह

गणित तथा सांख्यिकी विभाग,

जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[ प्राप्त—जुलाई 4, 1990 ]

### सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुचर A-फलन तथा बेसेल फलनों वाले एक समाकल का मान ज्ञात किया गया है और इसका उपयोग इस A-फलन के लिए प्रसार सूत्र स्थापित करने में किया गया है।

### Abstract

An expansion formula for multivariable A-function. By R. K. Saxena and Yashwant Singh, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Jodhpur (Raj.).

The authors evaluate an integral involving multivariable A-function and Bessel functions and use it in establishing an expansion formula for this A-function in terms of a series of product of A-function and Bessel function  $J_\nu(x)$ .

### 1. प्रस्तावना

गौतम, असगर तथा गोयल<sup>[1]</sup> द्वारा परिभाषित बहुचर A-फलन को निम्नवत् परिभाषित एवं अंकित किया जावेगा—

$$A[z_1, \dots, z_r] = A_{p, q; N}^{m, n; M} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \dots \int_{L_r} \theta_1(s_1) \dots \theta_r(s_r) \phi(s_1, \dots, s_r) z_1^{s_1} \dots z_r^{s_r} ds_1 \dots ds_r \quad (1.1)$$

यहाँ पर तथा पूरे प्रपत्र में (1.1) में प्रयुक्त संकेतों का निम्नलिखित अभिप्राय होगा :

$$M=m_1, n_1; \dots; m_r, n_r; \quad N=p_1, q_1; \dots; p_r, q_r;$$

$$P_1=(a_j; A'_j, \dots, A^{(n)}_j)_{1,p}; \quad Q_1=(b_j; B'_j, \dots, B^{(n)}_j)_{1,q};$$

$$P_2=(a'_j, C'_j)_{1,p_1}; \dots; (\alpha^{(n)}_j, C^{(n)}_j)_{1,p_i};$$

$$Q_2=(\beta'_j, D'_j)_{1,q_1}; \dots; (\beta^{(n)}_j, D^{(n)}_j)_{1,q_i};$$

$$\omega=\sqrt{-1};$$

$$\theta_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{m_i} \Gamma(\beta_j^{(i)} - D_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{n_i} \Gamma(1 - \alpha_j^{(i)} + C_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=m_i+1}^{q_i} \Gamma(1 - \beta_j^{(i)} + D_j^{(i)} s_i) \prod_{j=n_i+1}^{p_i} \Gamma(\alpha_j^{(i)} - C_j^{(i)} s_i)} \quad (1.2)$$

$$\phi(s_1, \dots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^r A_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \sum_{i=1}^r B_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^r A_j^{(i)} s_i) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^r B_j^{(i)} s_i)} \quad (1.3)$$

यहाँ

$m, n, p, q, m_j, n_j, p_j$ , एवं  $q_j$  अन्तुण संख्याएँ हैं तथा समस्त

$a'_j s, b'_j s, \alpha_j^{(i)} s, \beta_j^{(i)} s$  सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

यहाँ पर तथा आगे भी  $i$  का विचरण 1 से  $r$  तक होगा।

$r$ -चरों के  $A$ -फलन को परिभाषित करने वाला बहुसमाकल परम अभिसारी होता है यदि

$$\xi_i^* = 0, \eta_i > 0 \text{ तथा } |\arg(\xi_i)z_k| < \frac{\pi}{2} \eta_i$$

जहाँ

$$\xi_1 = \prod_{j=1}^p \left\{ A_j^{(i)} \right\} A_j^{(i)} \prod_{j=1}^q \left\{ B_j^{(i)} \right\} - B_j^{(i)} \prod_{j=1}^{q_i} \left\{ D_j^{(i)} \right\} D_j^{(i)} \prod_{j=1}^{p_i} \left\{ C_j^{(i)} \right\} - C_j^{(i)},$$

$$\xi_i^* = I_m \left[ \sum_{j=1}^p A_j^{(i)} - \sum_{j=1}^q B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{p_i} C_j^{(i)} \right],$$

$$\eta_i = \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^n A_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^p A_j^{(i)} + \sum_{j=1}^m B_j^{(i)} - \sum_{j=m+1}^q B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} \right. \\ \left. - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} \right]$$

A-फलन के विस्तृत विवरण के लिए देखें गौतम, असगर तथा गोयल<sup>[1]</sup>।

## 2. समाकल

हमें जिस समाकल का मूल्यांकन करना है वह है

$$\int_0^\infty x^{-u} J_\mu(x) J_\nu(x) A_{\substack{m, n : M \\ p, q : N}} \left[ \begin{matrix} x^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ x^{2h_r} z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix} \right] dx \\ = 2^{-u} A_{\substack{m+1, n+1 : M \\ p+4, q+1 : N}} \left[ \begin{matrix} 2^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ 2^{2h_r} z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (R; h_1, \dots, h_r) : P_1 \\ (u; 2h_1, \dots, 2h_r) : Q_1 \\ (S, h_1, \dots, h_r) : (T; h_1, \dots, h_r); (U; h_1, \dots, h_r) : P_2 \\ : Q_2 \end{matrix} \right] \quad (2.1)$$

जहाँ

$$R = \frac{1-\mu-\nu+u}{2}; \quad S = \frac{u+\mu+\nu+1}{2}; \\ T = \frac{u-\mu+\nu+1}{2}; \quad U = \frac{u+\mu-\nu+1}{2} \quad (2.2)$$

समाकल (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है—

$$(i) \quad \text{Re} \left( \mu + \nu - u + 2 \sum_{j=1}^r h_j \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}} \right) > -1; \quad j=1, \dots, m_i$$

$$(ii) \quad \operatorname{Re} \left( 2 \sum_{i=1}^j h_i \frac{a_j^{(i)} - 1}{C_j^{(i)}} - u \right) < -1; \quad j=1, \dots, n_i$$

$$(iii) \quad \Omega_i > 0, |\arg z_i| < \frac{1}{2} \Omega_i \pi$$

जहाँ

$$\begin{aligned} \Omega_i = & - \sum_{j=n_i+1}^p A_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=1}^q B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} D_i^{(i)} \\ & - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

उपपत्ति :

समाकल्य में बहुचर  $A$ -फलन को बहुगुण मेलिन-बार्नीज समाकल (1.1) के रूप में व्यक्त करते एवं समाकलनों के क्रम को परस्पर बदल देने पर, समाकल का रूपान्तर

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \dots \int_{L_r} \theta_1(s_1) \dots \theta_r(s_r) \phi(s_1, \dots, s_r) z_1^{s_1} \dots z_r^{s_r} \\ & \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{x^{-u-2 \sum_{i=1}^r h_i s_i}}{x} J_\mu(x) J_\nu(x) dx \right\} ds_1 \dots ds_r \end{aligned}$$

में हो जाता है। यदि हम आन्तरिक समाकल का मान सूत्र [2, p. 342, (24)], द्वारा निकालें तथा परिणाम की व्याख्या (1.1) द्वारा करें तो हमें परिणाम (2.1) प्राप्त होता है।

### 3. प्रसार सूत्र

यहाँ हमें जिस प्रसार सूत्र की स्थापना करनी है वह है—

$$\begin{aligned} & x^{-u} J_\mu(x) A_{p, q: N}^{m, n: M} \left[ \begin{matrix} x^{2h_1 z_1} \\ \vdots \\ x^{2h_r z_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix} \right] \\ & = 2^{-u} \sum_{s=0}^\infty k J_k(x) A_{p+4, q+1: N}^{m+1, n+1: M} \left[ \begin{matrix} 2^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ 2^{2h_r} z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left( \frac{2-k-\mu+u}{2}; h_1, \dots, h_r \right) \\ (1+u; 2h_1, \dots, 2h_r) \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &: P_1 : \left( \frac{2+k+\mu+u}{2} ; h_1, \dots, h_r \right) : \left( \frac{2+k-\mu+u}{2} ; h_1, \dots, h_r \right) \\
 &: Q_1 \\
 &: \left( \frac{2-k+\mu+u}{2} ; h_1, \dots, h_r \right) : P_2 \\
 &: Q_2 \Bigg] \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

जहाँ

$h_1, \dots, h_r$  घन संख्याएँ हैं तथा  $k=u+2s+1$ ;

$$\operatorname{Re} \left( \mu + \nu - u + 2 \sum_{i=1}^r h_i \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}} \right) > -1; j=1, \dots, m_i;$$

$$Q_i > 0; |\arg z_i| < \frac{1}{2} Q_i \pi$$

जहाँ  $Q_i$  को (2.3) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$m, n, p, q, m_i, n_i, p_i$  एवं  $q_i$  ऐसी अचर पूर्ण संख्याएँ हैं कि  $0 \leq m_i \leq q_i, 0 \leq n_i \leq p_i, 0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ .

उपपत्ति :

माना कि

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^{-u} J_\mu(x) A \begin{bmatrix} x^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ x^{2h_r} z_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} C_s J_{\mu+2s+1}(x) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

उपयुक्त समीकरण वैध है क्योंकि  $f(x)$  संतत है और विवृत अन्तराल  $(0, \infty)$  में, जब  $u \geq 0$ , बद्ध विचरण वाला है।

यदि हम (3.2) के दोनों पक्षों में  $x^{-1} J_{\mu+2s+1}(x)$  से गुणा करें और  $x$  के प्रति 0 से  $\infty$  तक समाकलन करें तो

$$\int_0^\infty x^{-u-1} J_{u+2t+1}(x) J_\mu(x) A \begin{matrix} m, n : M \\ p, q : N \end{matrix} \left[ \begin{matrix} x^{2h_1 z_1} \\ \vdots \\ x^{2h_r z_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_2 : Q_3 \end{matrix} \right] dx$$

$$= \sum_{s=0}^r C_s \int_0^\infty x^{-1} J_{u+2t+1}(x) J_{u+2s+1}(x) dx$$

अब (2.1) एवं बेसिल फलनों [3, p. 291(6)] की लाम्बिकता गुण का उपयोग करते हुए

$$\int_0^\infty t^{-1} J_{v+2n+1}(t) J_{t+2m+1}(t) dt = 0, \text{ यदि } m \neq n,$$

$$= (4n+2v+2)^{-1}, \quad \text{यदि } m=n,$$

$$R(v)+n+m > -1.$$

हमें निम्न की प्राप्ति होगी—

$$C_t = \frac{2-u}{v-1} A \begin{matrix} m+1, n+1 : M \\ p+4, q+1 : N \end{matrix} \left[ \begin{matrix} 2^{2h_1 z_1} \\ \vdots \\ 2^{2h_r z_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left( \frac{2-\mu-v+u}{2}; h_1, \dots, h_r \right) \\ (1+u; 2h_1, \dots, 2h_r) \end{matrix} \right]$$

$$: P_1 : \left( \frac{2+u+\mu+v}{2}; h_1, \dots, h_r \right); \left( \frac{2+u+v-\mu}{2}; h_1, \dots, h_r \right)$$

$$: Q_1$$

$$: \left( \frac{u+\mu-v+2}{2}; h_1, \dots, h_r \right) : P_2 \left. \vphantom{\begin{matrix} m+1, n+1 : M \\ p+4, q+1 : N \end{matrix}} \right\} : Q_2 \quad (3.3)$$

जहाँ  $v=u+2t+1$  (3.2) एवं (3.3) का उपयोग करने पर (3.1) की प्राप्ति होती है।

#### 4. विशिष्ट दशाएँ

बहुचर A-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से यह एक तथा अनेक चरों वाले कई उच्चतर अबीजी फलनों में समानीत हो जाता है फलस्वरूप परिणाम (2.1) तथा (3.1) से दर्जनों विशिष्टीकरण प्राप्त होते हैं। संक्षिप्तता की दृष्टि से (2.1) तथा (3.1) की कुछ विशिष्ट दशाएँ आगे दी जा रही है



यदि  $C_j$ 's तथा  $D_j$ 's असली तथा घन हों और  $m=n=p=q=0$ , (2.1) तथा (3.1) क्रमशः निम्नलिखित परिणामों में समानीत हो जाता है

$$\int_0^\infty x^{-u} J_\mu(x) J_\nu(x) \prod_{i=1}^r \left\{ H_{\substack{m_i, n_i \\ p_i, q_i}} \left[ x^{2h_i} z_i \left| \begin{matrix} (a_j^{(i)}, C_j^{(i)})_{1, p_i} \\ (\beta_j^{(i)}, D_j^{(i)})_{1, q_i} \end{matrix} \right. \right] \right\} dx$$

$$= 2^{-u} A_{\substack{1, 1 : M \\ 4, 1 : N}} \left[ \begin{matrix} 2^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ 2^{2h_r} z_r \end{matrix} \left| \begin{matrix} (R; h_1, \dots, h_r) : (S; h_1, \dots, h_r) \\ (u, 2h_1, \dots, 2h_r) \\ (T; h_1, \dots, h_r) : (U; h_1, \dots, h_r) : P_2 \\ : Q_2 \end{matrix} \right. \right], \quad (4.1)$$

जहाँ  $R, S, T$  एवं  $U$  को (2.2) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(4.1) की वैधता का प्रतिबन्ध निम्नवत् है—

$$(i) \quad \operatorname{Re} \left( \mu + \nu - u + 2 \sum_{i=1}^r h_i \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}} \right) > -1; \quad j=1, \dots, m_i.$$

$$(ii) \quad \operatorname{Re} \left( 2 \sum_{i=1}^r h_i \frac{a_j^{(i)} - 1}{C_j^{(i)}} - u \right) < -1; \quad j=1, \dots, n_i.$$

$$(iii) \quad \delta_i > 0, |\arg z_i| < \frac{1}{2} \delta_i \pi$$

जहाँ

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} > 0 \quad (4.2)$$

एवं

$$x^{-u} J_\mu(x) \prod_{i=1}^r \left\{ H_{\substack{m_i, n_i \\ p_i, q_i}} \left[ x^{2h_i} z_i \left| \begin{matrix} (a_j^{(i)}, C_j^{(i)})_{1, p_i} \\ (\beta_j^{(i)}, D_j^{(i)})_{1, q_i} \end{matrix} \right. \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-u} \sum_{s=0}^{\infty} k J_k(x) A_{4, 1 : N}^{1, 1 : M} \left[ \begin{matrix} 2^{2h_1 z_1} \\ \vdots \\ 2^{2h_r z_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left( \frac{2-k+\mu+u}{2}; h_1, \dots, h_r \right) \\ (1+u; 2h_1, \dots, 2h_r) \end{matrix} \right. \\
&\quad : \left( \frac{2+k+\mu+u}{2}; h_1, \dots, h_r \right) : \left( \frac{2+k-\mu+u}{2}; h_1, \dots, h_r \right) \\
&\quad : - \\
&\quad \left. : \left( \frac{2-k+\mu+u}{2}; h_1, \dots, h_r \right) : P_2 \right\} \\
&\quad : Q_2 \left. \right\} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

जहाँ  $h_1, \dots, h_r$  धन संख्याएँ हैं तथा  $k=u+2t+1$ ;

$$\operatorname{Re} \left( \mu + \nu - u + 2 \sum_{i=1}^r h_i \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}} \right) > -1, \quad j=1, \dots, m_i;$$

$$\delta_i > 0; \quad |\arg z_i| < \frac{1}{2} \pi \delta_i,$$

जहाँ  $\delta_i$  को (4.2) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$m_i, n_i, p_i \text{ एवं } q_i$$

ऐसी अचूण संख्याएँ हैं कि

$$0 \leq m_i \leq q_i, \quad 0 \leq n_i \leq p_i.$$

दूसरी ओर यदि हम  $r=2$ ,  $z_1=\alpha$  एवं  $h_2=0$ , रखें तो (2.1) एवं (3.1) एक ज्ञात परिणाम में समानीत हो जाते हैं<sup>[4]</sup>।

प्राचलों के और आगे विशिष्टीकरण पर हमें बोरा तथा कल्ला<sup>[5]</sup> एवं बाजपेयी<sup>[6]</sup> के परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

निर्देश

1. गौतम, जी० पी०, असगर, ए० एस० तथा गोयल, ए० एन०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1986, 29, 67-81.
2. एडेल्यी, ए० इत्यादि; Tables of Integral Transforms, भाग 2 मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
3. ल्यूक, वार्ड० एल०, Integrals of Bessel Functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1962
4. वोरा, एस० एल०, सक्सेता, आर० के० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman, Rev. Ser. 1972, A22, 43-48.
5. वोरा, एस० एल० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman, Rev. Ser. 1971, A21, 53-58.
6. बाजपेयी, एस० डी०, Proc. Camb. Phil. Soc. 1969, 65, 683-685.

## गिरिडीह के लोगों में $Rh^{-ve}$ घटनाओं की गणना

चतुर्भुज साहु

मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह (बिहार)

[ प्राप्त—अक्टूबर 28, 1990 ]

### सारांश

मानव विभेदों के अध्ययन में  $Rh$  एक समूह और उसके विभिन्न ऐलीलों की खोज ने एक नई दिशा दी है। रक्त के आदान-प्रदान में  $Rh$  रक्त-समूह के दो फिनोटाइपों  $Rh^{+}$  तथा  $Rh^{-}$  की अत्यधिक महत्ता है। प्रस्तुत अध्ययन में 44  $Rh^{+}$  सन्तान की माताओं में प्रथम प्रसवावस्था के समय ऐण्टी- $D$  इम्युनो-ग्लोबिन की सुई न लगाने पर भी 14 बच्चे सामान्य रूप से पैदा हुए जबकि शेष बच्चे रुग्ण थे। सेक्स होमोजिनीटी के अन्तर्गत काई वर्ग में महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया ( $\chi^2=24$ ,  $df=1$ ,  $p>0.05$ )।

$Rh^{-}$  घटनाओं की गणना करने पर पाया गया कि 10000 गर्भों में से 720 केसों में  $Rh^{-}$  माँ होंगी और उनमें से 92 प्रतिशत केसों में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फेटलिस के लिए  $Rh^{-}$  जीनी प्रतिबन्ध होंगे।

### Abstract

An estimation of  $Rh^{-}$  negative incidence among the people of Giridih. By Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College (Bihar).

The discovery of  $Rh$  blood group and its different alleles has given a new direction to the study of human diversity. The simple dicotomy of the  $Rh$  blood group phenotypes into  $Rh^{+}$  positive and  $Rh^{-}$  negative has still its importance in clinical obstetrics and blood transfusion. In the present study an attempt has been made to estimate the rate of  $Rh^{-}$  negative incidence among 1100 blood samples of Giridih town. The sex homogeneity chi square has been found significant ( $\chi^2=24$ ,  $df=1$ ,  $p>0.05$ ).

*Rh*-negative mothers gave birth to 14 (20%) *Rh* positive normal children without injected anti-D immunoglobulin injection whereas 30 (41.97%) cases occurred with jaundice, abnormal babies, congenital malformed foetus, meningomyelocoele with talipes equinovarus deformity.

It has been estimated that in 10000 pregnancies 720 cases would be of *Rh*-negative mothers and of which 92% cases will have the *Rh* genetic conditions for Erythroblastosis foetalis.

मानव-विभेदों के अध्ययन के लिए मानव-वैज्ञानिक सर्वप्रथम मानवमिति एवं रक्त समूहों की प्रविधियों का ही प्रयोग करते थे। परन्तु, *Rh* तथा उसके विभिन्न ऐलीलों आदि की खोज ने मानव-विभेदों के अध्ययन को एक नई दिशा प्रदान की है। रक्त-वर्ग के अन्तर्गत *Rh* संहति गर्भाधान एवं प्रजनन की दृष्टि से विशेष महत्व रखता है। इसके मूल में विरोधी रिसस सिरम द्वारा आतंचित कोशिकाएँ हैं। *Rh*-स्त्री तथा *Rh*+ पुरुष के यौन-सम्बन्ध से भ्रूण रोगग्रस्त हो सकता है। यानुस<sup>[1]</sup> ने बताया है कि *Rh* अपेक्षाकृत *ABO* रक्त-वर्ग के असंयोज्य स्त्री-पुरुष यौन-सम्बन्ध से भ्रूण के रोगी होने तथा गर्भपात होने की सम्भावना कहीं अधिक है क्योंकि *ABO* की असंयोज्यता से ऐण्टीबॉडी अधिक शीघ्र परिवर्द्धित होते हैं।

*ABO* रक्त-समूह एवं रोग से सम्बन्धित कुछ शोध-कार्य प्रकाशित हुए हैं और पाया गया है कि *A* रक्त-समूह के अधिक व्यक्ति रोग से ग्रसित होते हैं (चक्रवर्ती<sup>[2]</sup>)। अर्ड तथा अन्यो<sup>[3]</sup> ने *ABO* तथा *Rh* रक्त-समूहों एवं रोग की गणना की है। सालजानो<sup>[4]</sup> ने कुछ रोगियों में *Rh* (*D*) का परिणाम प्रस्तुत किया है, परन्तु  $\chi^2$  (काई वर्ग) में उन्हें कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं मिला है।

इस प्रकार का कार्य सामान्यतः विहार एवं विशेषकर गिरिडीह में नहीं किया गया है। *Rh* रक्त समूह के दो फिनोटाइप *Rh*+ एवं *Rh*- की महत्ता अभी भी रक्त के आदान-प्रदान में बनी हुई है। इसी को ध्यान में रखकर प्रस्तुत अध्ययन में गिरिडीह के लोगों में *Rh*- घटनाओं की गणना करने की चेष्टा की गई है।

### प्रयोगात्मक

#### सामग्री एवं विधि :

वर्तमान अध्ययन के लिए कुल 1100 व्यक्तियों स्त्री पुरुष को जाँचा गया। 2-3 बूंद रक्त अंगुली से या 1 मिली० रक्त शिरा से निःशाल कर विन्ट्रोव बोतल में रखकर रक्त-समूह तथा *Rh* की गणना की गयी। इसके लिए डाउन्सफोर्ड तथा बाउली<sup>[5]</sup> की विधि को अपनाया गया।

#### परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से पता चलता है कि *AB*+ (8%) तथा *AB*- (0.001%) की बारम्बारता कम है जबकि *B*+ तथा *B*- एवं *O*+ तथा *O*- की बारम्बारता लगभग समान और अधिक है। वर्तमान अध्ययन साहु तथा अन्यो<sup>[6]</sup> के ही समान है।

## सारणी 1

## ABO रक्त-समूह की बारम्बारता

रक्त-समूह	बारम्बारता (% में)
$AB^+$	8
$AB^-$	0.001
$A^+$	26
$A^-$	1
$B^+$	29
$B^-$	3
$O^+$	30
$O^-$	3

## सारणी 2

 $Rh^-$  माता तथा  $Rh^+$  पिता से उत्पन्न  $Rh^-$  एवं  $Rh^+$  सन्तान की बारम्बारता

$Rh^-$ माता	$Rh^-$ सन्तान	$Rh^+$ सन्तान
71	27 (38.03%)	44 (61.97%)
		<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> ↓ सामान्य प्रसव 14 (20%) </div> <div style="text-align: center;"> ↓ असामान्य प्रसव 30 (41.97%) </div> </div>

71  $Rh^-$  माताओं ने 27 (38.03%)  $Rh^-$  तथा 44 (61.97%)  $Rh^+$  सन्तानों को जन्म दिया जिनमें सभी  $Rh^-$  सन्तानें सामान्य पायीं गयीं जबकि  $Rh^+$  सन्तानें सामान्य तथा असामान्य दोनों ही तरह के प्रसवों से उत्पन्न हुईं। 44  $Rh^+$  सन्तान की माताओं में प्रथम प्रसवावस्था के समय ऐण्टी-D इम्युनो-ग्लोबिन की सुई नहीं लगने के बावजूद भी 14 (20%)  $Rh^+$  बच्चे सामान्य रूप से पैदा हुए परन्तु 30 (41.97%) बच्चे पीलिया, जन्मजात कुपोषित बच्चे, असामान्य मेनिंगोमाइलोसिस रोगों से ग्रसित थे।

## सारणी 3

1100 स्त्री-पुरुषों में  $Rh^+$  तथा  $Rh^-$  की बारम्बारता

लिंग	संख्या	$Rh^+$ की संख्या	%	$Rh^-$ की संख्या	%
पुरुष	390	382	97.7	8	2.1
स्त्री	710	739	90	71	10
कुल	1100	1021	92.8	79	7.2

 $\chi^2$  (काई वर्ग) = 24\*,  $df=1$ 

\* महत्वपूर्ण अन्तर दर्शाता है 0.05 पर

सारणी-3 में  $Rh^+$  और  $Rh^-$  फिनोटाइप को पुरुषों एवं स्त्रियों के सन्दर्भ में दर्शाया गया है। काई वर्ग जाँच से पता चलता है कि सेक्स होमोजिनीटी के बीच महत्वपूर्ण अन्तर है ( $\chi^2=24$ )। पुरुषों तथा स्त्रियों की संख्या मिला देने से कुल 1100 हिन्दुओं में  $Rh^+$  की घटना 92.8% तथा  $Rh^-$  की घटना 7.2% पायी गयी।

चूँकि  $Rh^-$  घटना से सम्बन्धित शोध कार्य नहीं के बराबर है इसलिए प्रस्तुत अध्ययन की चक्रवर्ती तथा अन्यो[7] के द्वारा राँची के हिन्दू समुदाय में प्राप्त घटना 3.13% से तुलना की गयी है। वर्तमान अध्ययन में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फेटलिस की सम्भावित दर की गणना  $Rh^-$  की कुल घटना 7.2% पर आधारित है

यदि

 $p=D$  प्रबल जीन की बारम्बारता $q=d$  अप्रबल जीन की बारम्बारता

तथा

 $p+q=1$  सम्पूर्ण जीन आवृत्ति

तो हार्डी-वाइनबर्ग सन्तुलन नियम के अनुसार

पितृयौन सम्बन्ध पुरुष $\times$ स्त्री		उत्पन्न सन्तानों में प्रत्याशित जीन प्ररूप (% में)		
$\sigma$	$\varphi$	$DD$	$Dd$	$dd$
$Dd$	$\times$ $dd$	$\times$	50	50
$pq$	$\times$ $q^2$		$pq^2$	$pq^2$
$DD$	$\times$ $dd$	100	$\times$	$\times$
$p^2$	$\times$ $q^2$	$p^2q^2$		

$Rh^-$  माताओं के कुल गर्भ में—

(1)  $pq^3 (dd) Rh^-$  फैक्टर उत्पन्न करेगा और (2) शेष आधा  $pq^3 (Dd) + p^2q^2 (DD) Rh^+$  फैक्टर उत्पन्न करेगा ।

अतः

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{pq^3}{2pq^3 + p^2q^2} \\
 &= \frac{pq^3}{pq^3 + pq^3 + p^2q^2} \\
 &= \frac{pq^3}{pq^3(q+q+p)} \\
 &= \frac{q}{q+q+p} \\
 &= \frac{q}{q+1}
 \end{aligned}$$

सिद्धान्ततः  $Rh^-$  माँ गर्भवती होने पर  $Rh^-$  फैक्टर उत्पन्न करती है जो पूर्णतः सुरक्षित है ।

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{pq^3 + p^2q^2}{2pq^3 + p^2q^2} \\
 &= \frac{pq^2(q+p)}{pq^3 + pq^3 + p^2q^2} \\
 &= \frac{pq^2(q+p)}{pq^2(q+q+p)} \\
 &= \frac{q+p}{q+q+p} \\
 &= \frac{1}{q+1}
 \end{aligned}$$

अतः  $Rh^-$  माँ गर्भवती होने पर  $Rh^+$  फैक्टर उत्पन्न करती है जो भ्रूण के लिए घातक है ।

अब

$$\frac{1}{q+1} = \frac{1}{Rh^-+1} = \frac{1}{0.072+1} = 0.924$$

इसलिए  $Rh^-$  गर्भवती माताएं 92% स्थिति में फिटस के लिए हिमोलायटिक उत्पन्न करेंगी ।

इससे यह गणना की जा सकती है कि 10000 गर्भों में 720 केसों में  $Rh^-$  माँ होंगी और उनमें से 92%



जो लगभग 662 केसों में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस के लिए  $Rh^-$  जीनी प्रतिबन्ध होंगे। चक्रवर्ती तथा अन्यो ने<sup>[9]</sup> राँची की हिन्दू आबादी में गणना करके पाया है कि 10000 गर्भों में 313 केसों में  $Rh^-$  माँ हैं जिनमें से 294 केसों में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस के लिए जीनी प्रतिबन्ध है।

मुखर्जी<sup>[8]</sup> ने पश्चिम बंगाल के हिन्दुओं पर इसकी घटना का दर 3.26 पाया है।

हार्टमेन<sup>[9]</sup> एवं स्ट्राटन<sup>[10]</sup> ने यूरोपीय जनसंख्या पर गणना के बाद पाया कि फीटस में हिमोलायटिक रोग की बारम्बारता बहुत ही कम (लगभग 5% से 10%) है। इसी तरह की समान घटना की दर से गिरिडीह के लोगों पर गणना करने पर यह पाया गया कि 10000 गर्भों में केवल 33 से 66 केसों (662 माताओं का 5% से 10% जो  $Rh^-$  फीटस को अपने गर्भ में पाल रही हों) में ही इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस रोग होगा तथा यह घटना राँची की हिन्दू जनसंख्या में 12 से 25 केसों में ही लागू होगी।

#### निर्देश

1. यानुस, व्युत्तर, ने० से० इन मेन, 1959, 61, 437
2. चक्रवर्ती, एम० आर०, एन्थ्रो० स० ई०, 1972
3. अडें, एल०, वेन्टाल, एच० एच० तथा रोबर्ट, जे० ए० एफ०, ब्रि० मे० जं० 1953, 1, 799
4. सालजानो, एफ० एम०, मे० जेने० 1967, 4, 102-106
5. डाउन्सफोर्ड, आई० तथा वाउली, सी० सी०, ओ० ए० ब्रो०, 1955
6. साहु, चतुर्भुज तथा गोपालकृष्णन, के० आर०, ईस्का, 1984 (अप्रकाशित)
7. चक्रवर्ती, आर०, बोस, के० सी० तथा नारायण, डी०, ई० एन्थ्रो०, 1981, II, 65-58
8. मुखर्जी, बी० एन०, टे० रि० एन्थ्रो० 1970, 8170
9. हार्टमेन, सी०, ब्ले० सा० प० लन्दन, 1949
10. स्ट्राटन, एफ०, बटर, लन्दन, 1953

## अवशिष्ट $Cd \times Pb$ अन्योन्य क्रिया का उपज तथा भारी धातुओं के अवशोषण पर प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा प्रमोद कुमार शुक्ल

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[ प्राप्त—मार्च 1, 1991 ]

### सारांश

प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया का पौधों तथा मिट्टी के प्रभाव पर चल रहे अध्ययन को आगे बढ़ाते हुए हमने कैडमियम ( $Cd$ )  $\times$  लेड ( $Pb$ ) की अन्योन्य क्रिया का अवशिष्ट प्रभाव देखने के लिए फसल चक्र के अन्तर्गत तीसरी फसल पालक उगायी। हमने देखा कि इस अवशिष्ट अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज पर कोई प्रभाव नहीं हुआ, यद्यपि अकेले कैडमियम का उल्लेखनीय प्रभाव दिखा।

यह भी पाया गया कि पालक की जड़ों तथा तनों द्वारा कैडमियम तथा लेड का अवशोषण इसके पूर्व उगाई गई मक्का या शलजम की फसल से कम हुआ और यह अवशोषण योगवाही अन्योन्य क्रिया (Synergistic effect) का सूचक है। पालक द्वारा  $Fe$ ,  $Zn$  एवं  $Mn$  जैसी धातुओं के अवशोषण पर प्रतिरोधी अन्योन्य क्रिया (antagonistic interaction) पाई गई।

### Abstract

**Effect of residual  $Cd \times Pb$  interaction on the yield and uptake of heavy metals by spinach.** By S. G. Misra and P. K. Shukla, Sheila Dhar Institute of Soil Sciences, University of Allahabad, Allahabad.

In continuation to our previous studies regarding the effect of  $Cd \times Pb$  interaction on plants and soil, an experiment was conducted to assess the residual effect of pollutants interaction on the third crop which was spinach. It has been observed that residual  $Cd \times Pb$  interaction was not reflected on the yield of this third crop. Only  $Cd$  exhibited remarkable effect on the yield of spinach whereas no such effect was found with  $Pb$ .

It was also observed that the uptake of Cd and Pb roots and shoots of spinach was less than either of maize or turnip grown previously only high levels of Cd and Pb could exert a synergistic interacting effect on their uptake whereas an antagonistic interacting effect was seen on the uptake of heavy metals like Fe, Zn and Mn by spinach.

पौधों तथा जानवरों के लिए धात्विक प्रदूषकों की अत्यधिक विषाक्तता मृदा प्रदूषण की एक जटिल समस्या है। ये प्रदूषणकारी धातुएँ (Cd, Pb, Hg, Cr आदि) अब मिट्टी की ऊपरी सतह पर जिस पर पौधे उगते हैं तथा मानव जीवन की दैनिक क्रियाएँ होती हैं, एकत्रित हो जाते हैं तो वे आपस में अन्य पोषक तत्वों एवं जन्तुओं के साथ प्रतिरोधी (Antagonistic) या योगवाही (Synergistic) अन्योन्य क्रिया (Interaction) करते हैं<sup>[7]</sup>। फलस्वरूप पौधों के लिए प्रदूषकों एवं पोषक तत्वों की उपलब्धता और उनका अवशोषण प्रभावित होता है। साथ ही जन्तुओं की जीवन प्रक्रियाओं पर भी कुप्रभाव पड़ता है।

पौधों द्वारा कैडमियम (Cd) तथा लेड (Pb) के अवशोषण से फसल उपज एवं उसकी गुणवत्ता पर प्रभाव पड़ता है<sup>[8]</sup>। हमने अपने पूर्व प्रयोगों<sup>[5,6]</sup> से यह निष्कर्ष निकाला है कि कैडमियम तथा लेड को मिट्टी में अलग-अलग या उन्हें एक साथ मिला कर डालने से उगाई गई प्रथम फसल मक्का व द्वितीय फसल शलजम के अंकुरण व उपज में कमी आती है और मिट्टी में इन प्रदूषकों की डाली गयी मात्रा के अनुसार ही इनका अवशोषण होता है। इसके फलस्वरूप अन्य भारी धातुओं (Fe, Zn, Mn एवं Cr) की उपलब्धता व अवशोषण दोनों ही में कमी आयी। हमने यह भी पाया कि कैडमियम तथा लेड में योगवाही अन्योन्य क्रिया हुई जबकि अन्य तत्वों के साथ इनकी प्रतिरोधी अन्योन्य क्रिया हुई। यही नहीं, लेड की अपेक्षा कैडमियम अधिक शक्तिशाली प्रदूषक सिद्ध होता है।

उपर्युक्त परिणामों एवं कारणों को ध्यान में रखकर कैडमियम तथा लेड से पूर्व उपचारित प्लाटों में फसल चक्र में तीसरी फसल पालक उगायी गयी और प्रदूषकों की अवशिष्ट अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज तथा पालक द्वारा अन्य भारी धातुओं के अवशोषण का अध्ययन प्रस्तुत किया जा रहा है।

### प्रयोगात्मक

#### प्रक्षेत्र की तैयारी

शीलाघर अनुसन्धान फार्म में 48 मी.<sup>2</sup> प्रक्षेत्र का चुनाव तथा उसकी अच्छी तरह तैयारी करके 1×1 मी.<sup>2</sup> आकार के 48 प्लाटों में बाँट लिया गया। फिर यादृच्छिक विधि द्वारा उपचार करके जून 1989 से फसल चक्र में लगातार मक्का, शलजम, पालक (कुल तीन फसलों) की फसलें उगायी गयीं। फसलों की कटाई परिपक्व होने पर की गयी। मृदा और पौधों के रासायनिक विश्लेषण के लिए प्रत्येक प्लाट से अलग-अलग प्रतिदर्श लिए गए।

#### उपचार

प्रक्षेत्र के 1×1 मी.<sup>2</sup> क्षेत्रफल के प्लाटों में 0, 25, 50 एवं 100 मिग्रा./किग्रा. कैडमियम तथा 0, 100, 200 एवं 400 मिग्रा./किग्रा. लेड प्रति हेक्टेयर की मात्राएँ डाली गयीं। कैडमियम

## सारणी 1

Cd × Pb अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज पर प्रभाव\*

उपचार संख्या	उपचार (मि०/कि० ग्रा०)	पौधों तथा जड़ों का हरा जैव भार (ग्राम/प्लॉट/मी० <sup>2</sup> ) पौधों का भार	जड़ों का भार
1.	लेड 0 + कैडमियम 0	600.00	100.00
2.	+ कैडमियम 25	533.33	90.00
3.	+ कैडमियम 50	500.00	80.00
4.	+ कैडमियम 100	433.33	73.33
5.	लेड 100 + कैडमियम 0	566.66	93.33
6.	+ कैडमियम 25	483.33	90.00
7.	+ कैडमियम 50	466.66	86.66
8.	+ कैडमियम 100	483.33	73.33
9.	लेड 200 + कैडमियम 0	550.00	96.66
10.	+ कैडमियम 25	496.66	86.66
11.	+ कैडमियम 50	491.66	80.00
12.	+ कैडमियम 100	466.66	73.33
13.	लेड 400 + कैडमियम 0	566.66	96.66
14.	+ कैडमियम 25	516.66	86.66
15.	+ कैडमियम 50	483.33	80.00
16.	+ कैडमियम 100	466.66	73.33
CD (at 5%) Cd	के लिए	55.91	36.06
„ „ Pb	„ „	NS	NS
„ „ Cd × Pb	„ „	NS	NS

\*प्रत्येक परिणाम तेहरी पुनरावृत्ति का माध्य है।

NS असार्थक

तथा लेड के कार्बोनेटों को अम्ल की सहायता से घोलकर तथा आसुत जल मिला कर उपयुक्त आयतन मिट्टी में मिलाया गया। कैडमियम तथा लेड को पृथक-पृथक तथा उनके संयोगों के साथ मिट्टी में डाला गया।

इन उपचारित प्लाटों में तीसरी फसल पालक, प्रजाति “वाराणसी”, की बुआई 3 ग्राम/प्लाट की दर से जनवरी 1990 में की गयी। प्लाटों को अत्यधिक समांग उर्वर बनाने के लिए पालक बोने के समय NPK की एक मात्रा 40:30:30 किग्रा/हेक्टेयर के हिसाब से मिट्टी में डाली गयी। पालक की सिंचाई एक सप्ताह के अन्तराल पर स्वच्छ पानी से की गयी। फसल बोने के 75 दिन बाद पौधों को उनकी जड़ों सहित उखाड़ लिया गया और जड़ों तथा तनों का अलग-अलग हरा भार ज्ञात किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में अंकित हैं।

पालक की जड़ों एवं तनों के प्रतिदर्शों को द्विअम्ल के मिश्रण ( $\text{HNO}_3 + \text{HClO}_4$ ) से पाचित किया गया। तत्पश्चात् निष्कर्षों में Cd, Pb, Fe, Zn एवं Mn का सान्द्रण ज्ञात करने के लिए एटामिक एब्जाप्शन स्पेक्ट्रो-फोटोमीटर (AAS) द्वारा विश्लेषण पूरा किया गया। AAS सुविधा उपलब्ध कराने के लिए हम केन्द्रीय मत्स्य प्रग्रहण शोध संस्थान, बैरकपुर (प० बंगाल) के आभारी हैं। प्राप्त परिणाम सारणी 2 तथा 3 में दिये गये हैं।

### परिणाम तथा विवेचना

#### पौधों तथा जड़ों का भार

सारणी-1 के अवलोकन से स्पष्ट हो जाता है कि नियन्त्रण की तुलना में कैडमियम की सर्वोच्च मात्रा (100 ppm) डालने से पौधों के भार में 27.78% तथा जड़ों के भार में 26.66% की कमी आयी। लेड की सर्वोच्च मात्रा (400 ppm) डालने से पौधों तथा जड़ों के भार में यह कमी क्रमशः 5.55% तथा 3.33% ही देखी गयी। दोनों प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप पौधों तथा जड़ों के भार में कोई विशेष परिवर्तन नहीं पाया गया।

सांख्यिकीय विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात होता है कि केवल अवशिष्ट कैडमियम ही पौधों तथा जड़ों के भार में सार्थकता स्तर पर कमी ला सका जबकि अवशिष्ट लेड पौधों तथा जड़ों के भार पर पूर्णतया निष्प्रभावी रहा। साथ ही अवशिष्ट कैडमियम × लेड अन्योन्य क्रिया का भी पौधों तथा जड़ों के भार पर कोई सार्थक प्रभाव नहीं पड़ा।

कैडमियम व लेड का प्रभाव पालक की उपज (पौधों तथा जड़ों के भार) पर इससे पूर्व उगायी गयी मक्का या शलजम फसल की तुलना में कम हानिकारक पाया गया। इससे स्पष्ट है कि केवल कैडमियम का हानिकारक प्रभाव अभी भी तीसरी फसल की उपज पर पड़ रहा है जबकि लेड का प्रभाव अकेले या कैडमियम के साथ समाप्त कर चुका है। डहिया आदि ने<sup>[2]</sup> भी मक्का की उपज पर कैडमियम का अधिक हानिकारक प्रभाव देखा है।

## सारणी 2

Cd × Pb अन्योन्य क्रिया का उनके पालक द्वारा अवशोषण पर प्रभाव\*

उपचार संख्या	उपचार (मिग्रा०/किग्रा०)	पालक में प्रदूषकों का सान्द्रण (मिग्रा०/किग्रा०)			
		जड़ों में		तनों में	
		Cd	Pb	Cd	Pb
1.	लेड 0 + कैडमियम 0	0.14	0.22	0.05	0.02
2.	+ कैडमियम 25	3.05	0.34	1.05	0.16
3.	+ कैडमियम 50	4.62	0.36	1.26	0.19
4.	+ कैडमियम 100	12.13	0.86	4.05	0.45
5.	लेड 100 + कैडमियम 0	0.16	3.11	0.12	1.15
6.	+ कैडमियम 25	4.65	3.73	1.30	1.18
7.	+ कैडमियम 50	4.65	4.15	1.36	1.80
8.	+ कैडमियम 100	12.15	5.18	4.01	2.00
9.	लेड 200 + कैडमियम 0	0.26	5.20	0.77	2.12
10.	+ कैडमियम 25	4.88	5.93	1.46	2.10
11.	+ कैडमियम 50	5.49	6.28	2.03	2.71
12.	+ कैडमियम 100	13.49	7.69	4.80	2.93
13.	लेड 400 + कैडमियम 0	0.39	8.11	0.23	3.04
14.	+ कैडमियम 25	5.08	8.65	1.81	3.31
15.	+ कैडमियम 50	6.10	9.00	2.46	3.58
16.	+ कैडमियम 100	15.98	11.00	5.11	4.51

\*प्रत्येक परिणाम दोहरी पुनरावृत्ति का माध्य है।

## सारणी 3

अन्योन्य क्रिया का पालक द्वारा भारी धातुओं के अवशोषण पर प्रभाव\*

उपचार संख्या	उपचार (मिग्रा०/किग्रा०)	पालक में भारी धातुओं का सान्द्रण (मिग्रा०/किग्रा०)					
		जड़ों में			तनों में		
		Fe	Zn	Mn	Fe	Zn	Mn
1.	लेड 0+कैडमियम 0	621.29	163.14	159.00	413.00	105.26	105.21
2.	+कैडमियम 25	620.11	161.24	158.26	411.31	103.48	104.13
3.	+कैडमियम 50	605.39	143.26	147.50	401.02	102.99	104.24
4.	+कैडमियम 100	584.66	114.14	118.21	383.11	73.45	86.00
5.	लेड 100+कैडमियम 0	620.30	164.00	158.41	411.21	104.29	104.83
6.	+कैडमियम 25	619.87	160.67	156.24	409.87	101.00	102.31
7.	+कैडमियम 50	600.08	141.10	146.98	389.26	83.24	93.66
8.	+कैडमियम 100	582.37	111.28	115.23	368.16	55.77	68.84
9.	लेड 200+कैडमियम 0	601.49	157.36	155.38	396.55	99.25	102.99
10.	+कैडमियम 25	598.34	139.21	141.77	391.22	85.00	89.67
11.	+कैडमियम 50	576.00	102.37	105.83	371.48	54.12	61.89
12.	+कैडमियम 100	534.11	89.00	99.83	333.50	39.44	49.00
13.	लेड 400+कैडमियम 0	600.21	157.38	154.42	395.06	98.08	100.43
14.	+कैडमियम 25	601.02	155.89	153.76	388.45	86.37	80.77
15.	+कैडमियम 50	541.77	94.39	99.00	311.88	47.99	59.11
16.	+कैडमियम 100	503.24	79.33	84.33	292.77	35.11	40.78

\*प्रत्येक परिणाम दोहरी पुनरावृत्ति का माध्य है।

### कैडमियम तथा लेड का अवशोषण

सारणी-2 से स्पष्ट है कि पालक की जड़ों एवं तनों द्वारा कैडमियम एवं लेड का अवशोषण इससे पूर्व बोई गयी मक्का या शलजम फसलों की अपेक्षा कम हुआ। केवल एक तिहाई कैडमियम अथवा लेड ही पालक की जड़ों के तनों की ओर स्थानान्तरित हो पाया। फिर भी पालक की जड़ों व तनों में कैडमियम का सान्द्रण लेड की अपेक्षा अधिक पाया गया। क्रीटोन ने अपने प्रयोग में पाया है कि लेड की अत्यधिक मात्रा पहली फसल या उसके कुछ दिन बाद मिट्टी में स्थिरीकृत हो जाती है जिससे बाद की फसलों द्वारा लेड कम अवशोषित किया जाता है।

सारणी-2 से यह भी स्पष्ट है कि कैडमियम एवं लेड की निम्न मात्राएँ (25 ppm Cd, 100 ppm Pb) अलग-अलग या संयोगों के साथ होने पर पालक द्वारा उनके अवशोषण पर कोई उल्लेखनीय प्रभाव नहीं डाल सकीं। परन्तु कैडमियम एवं लेड की उच्च मात्राओं (Cd 50, Cd 100, Pb 200 व Pb 400) होने से उनके अलग-अलग अवशोषण में वृद्धि हुई। इसी तरह उनसे संयोगों से पालक द्वारा उनके अवशोषण पर योगवाही प्रभाव पड़ा।

### अन्य भारी धातुओं का अवशोषण

सारणी-3 में दिये गये परिणामों से पुष्टि होती है कि अवशिष्ट कैडमियम एवं लेड पालक द्वारा आयरन (Fe), जिंक (Zn) तथा मैंगनीज (Mn) के अवशोषण पर अवरोधी प्रभाव (Inhibitory effect) डाला तो किन्तु इससे पूर्व उगायी गयी मक्का या शलजम फसल की तुलना में यह प्रभाव कम था। जिंक का अवशोषण सबसे अधिक और आयरन का सबसे कम प्रभावित हुआ।

उल्लेखनीय है कि केवल 44 प्रतिशत जिंक, 48 प्रतिशत मैंगनीज तथा 58 प्रतिशत आयरन पालक की जड़ों से तनों में स्थानान्तरित हो पाया।

कैडमियम × लेड (Cd 25 ppm तथा Pb 100 ppm) द्वारा उपचारित प्रक्षेत्रों में से पालक द्वारा Fe, Zn एवं Mn के अवशोषण पर कोई सार्थक प्रभाव नहीं पाया गया जबकि Cd 50 × Pb 200 के साथ अत्यल्प प्रभाव प्रदर्शित हुआ। सबसे अधिक प्रभाव तो Cd 100 × Pb 400 के साथ देखा गया।

अन्य भारी धातुओं के अवशोषण पर लेड ने कैडमियम की अपेक्षा कम प्रतिरोधी प्रभाव प्रदर्शित किया लेकिन संयुक्त प्रतिरोधी प्रभाव पृथक्-पृथक् प्रभाव की अपेक्षा अधिक अस्पष्ट था। मिश्रा एवं शुक्ला ने<sup>[5,6]</sup> मक्का पर किये गये प्रयोग में पाया है कि कैडमियम व लेड ने अन्य सूक्ष्म पोषक तत्वों (Fe, Zn व Mn) के अवशोषण को कम कर दिया। लेड से कैडमियम अधिक प्रभावकारी दृष्टिगोचर हुआ।

इस प्रयोग के आधार पर यह निष्कर्ष निकलता है कि Cd तथा Pb की उपस्थिति में अन्य भारी धातु प्रदूषकों का शोषण कम होता है।



## निर्देश

1. क्रीडोन, सी० एम०, J. Environ. Qual. 1937, 6, 358-368.
2. डहिया, एस० एस०, गोयल, एस० तथा सिंह, ए०, Proc. of Sym. at Haryana Agril. Univ. Hissar, 1984, 115.
3. जोन, एम० के०, J. Environ. Pollut., 1976, 11, 85-95.
4. मोर्टवेट, जे० जे०, Agron. Abstr. Dec. 3, 1978.
5. मिश्रा, एस० जी० तथा शुक्ला, पी० के०, Paper in Sym. at Rae Bareli, Feb., 23-24, 1991.
6. मिश्रा, एस० जी० तथा शुक्ला, पी० के०, Paper presented in Sym. at N. D. Agri. Univ. Faizabad, March, 13-14, 1991.
7. हासेट, जे० जे०, मिलर, जे० ई० तथा कापे, डी० ई०, J. Environ. Pollut., 1976, 11, 297-302.

## शुद्ध नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव का अध्ययन :

### काल प्रभावन का प्रभाव

जगदीश प्रसाद\*

रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[ प्राप्त—अक्टूबर 1, 1990 ]

### सारांश

ओजोनित, अर्ध-ओजोनित तथा स्लीव उत्तेजनों के अन्तर्गत विगैसित पात्रों में पारद-वाष्प-मुक्त नाइट्रोजन गैस में जोशी प्रभाव  $\Delta i$  का अध्ययन किया गया। तीनों ही नलियों में काल-प्रभावन के द्वारा देहली-विभव  $V_m$  का पर्याप्त मात्रा में ह्रास प्रेक्षित हुआ। यह भी पाया गया कि नलियों में विसर्जन की कुछ क्षणदीप्ति प्रवाहित होने पर ही  $\Delta i$  का प्रेक्षण होता है। इससे प्रतीत होता है कि  $\Delta i$  की उत्पत्ति के लिए जोशी-तल के कार्य-फलन में अवनमन होना परम आवश्यक है। प्राप्त परिणामों की व्याख्या इस प्रभाव के लिए प्रदत्त जोशी-सिद्धान्त तथा एक अभिगृहीत के आधार पर की गयी है।

### Abstract

**Studies of Joshi effect in pure nitrogen : Influence of ageing.** By Jagdish Prasad\*, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Joshi effect  $\Delta i$  has been studied in mercury vapour free nitrogen in degassed vessels under ozonizer, semi-ozonizer and sleeve excitation. In all the three tubes ageing was found to have decreased the threshold potential  $V_m$  appreciably. It was also observed that  $\Delta i$  could only be observed after a few flashes due to discharge had passed across the tubes. This suggests that a lowering in work function of the Joshi layer is essential for the inception of  $\Delta i$ . The results have been explained on the basis of Joshi theory for the phenomenon  $\Delta i$  with an additional postulate.

नाइट्रोजन की इलेक्ट्रॉन-बन्धुता ( $-0.6 \text{ eV}^{[1]}$ ) ऋणात्मक होने के कारण यह एक इलेक्ट्रॉन असंलगनक गैस है। जोशी<sup>[2,3]</sup> के अनुसार  $-\Delta i$ , किरणन के अन्तर्गत मन्द गति वाले ऋण आयनों

\* Present Mailing Address : 115, Krishna Puri, Meerut-250002.

द्वारा निर्मित अन्तराकाशी आवेश का प्रतिफल होता है। इलेक्ट्रॉन-मुक्त गैसों में  $\Delta i$  की व्याख्या के लिए जोशी<sup>[4]</sup> का विचार है कि इलेक्ट्रॉनों का बहुत अधिक उत्सर्जन स्वयं ही अन्तराकाशी आवेश-प्रभाव के कारण, विशेषतः तब जब इलेक्ट्रॉनों की गति मन्द होती है, धारा में ह्रास उत्पन्न कर सकता है। प्रस्तुत प्रपत्र में इस बात का अन्वेषण करने का प्रयत्न किया गया है कि क्या पारद-वाष्प-मुक्त शुद्ध नाइट्रोजन गैस में  $-\Delta i$  का प्रेक्षण सम्भव है।

### प्रयोगात्मक

उपकरण का सामान्य समुच्चय तथा प्रयुक्त विद्युत्-परिपथ पूर्वप्रकाशित<sup>[5]</sup> जैसे थे। मर्क-शुद्धि के सोडियम नाइट्राइट तथा अमोनियम क्लोराइड के मिश्रण के उष्मीय अपघटन से नाइट्रोजन गैस को प्राप्त किया गया। सम्भावित अपद्रव्यों को दूर करने के लिए गैस को अम्ल युक्त  $\text{FeSO}_4 \cdot \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ , ऐसीटिक अम्ल तथा क्षारीय पाइरोगैलोल विलयनों में प्रवाहित किया गया।  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{KOH}$  तथा  $\text{P}_2\text{O}_5$  द्वारा शुष्क की गयी गैस को  $400^\circ\text{C}$  के पालिशकृत  $\text{Cu}$ -रेतन पर प्रवाहित किया गया। अन्धकार में  $i_D$  तथा 200 वाट 220 वोल्ट के काँच-लैंप द्वारा किरणन के अन्तर्गत  $i_L$  विसर्जव धारा को परावर्तन-धारामापी द्वारा मापा गया। आपेक्षिक जोशी प्रभाव  $\% \Delta i = 100 \times \Delta i / i_D$ , जबकि  $\Delta i = (i_L - i_D)$ ।

### परिणाम तथा विवेचना

#### ओजोनित्र-उत्तेजन

$V_m$  पर ही  $-\Delta i$  का प्रेक्षण हुआ।  $V_m$  से आगे अनुप्रयुक्त  $V$  को बढ़ाने पर  $-\% \Delta i$  घटता गया। एक महत्वपूर्ण प्रेक्षण यह था कि जब नली को प्रथम बार किरणित किया गया तब किसी  $\Delta i$  का प्रेक्षण नहीं हुआ। तथापि, किरणन को बन्द करके, 5 सेकण्ड बाद जब नली को पुनः किरणित किया गया तो  $-6\% \Delta i$  का प्रेक्षण हुआ। अर्ध-ओजोनित्र तथा स्लीव-नली में भी इसी प्रकार के प्रेक्षण प्राप्त हुए। 'नए' तथा विगैसित ओजोनित्र में जो धारा परिवर्ती थी वह कुछ मिनटों के बाद काल-प्रभावन से अपरिवर्ती हो गयी। काल-प्रभावन ने  $V_m$  का लगभग 8% (0.78 से 0.72 kV) अवनमन कर दिया। काल के अनुसार  $i_D$  में कोई उल्लेखनीय परिवर्तन नहीं हुआ, जबकि  $i_L$  में महत्वपूर्ण ह्रास हुआ।  $V_m$  पर 90 मिनट के काल-प्रभावन से  $-\% \Delta i$  6 से 30 तक बढ़ गया, जो अगले 3 घंटों के काल-प्रभावन से बढ़कर 60 हो गया। धारा  $i$  के ओसिलोग्राफी अध्ययनों से पता लगा कि काल-प्रभावन ने एच० एफ० स्पन्दों को पर्याप्त बढ़ा दिया। घनात्मक तथा ऋणात्मक अर्धखंडों में धारा-संरचना लगभग सर्वसम थी। ओजोनित्र को किरणित करने पर स्पन्दों के आयाम घट गये किन्तु उनकी संख्या बढ़ गयी, जो  $+\Delta i$  तथा  $-\Delta i$  के सह-अस्तित्व का द्योतक है।

#### अर्ध-ओजोनित्र-उत्तेजन

दीप्ति  $P_t$  तार पर केन्द्रित थी। काल-प्रभावन से  $V_m$  लगभग 9% (0.67 से 0.61 kV) घट गया।  $V_m$  पर काल-प्रभावन से 90 मिनट में  $-\% \Delta i$  4 से बढ़कर 63 हो गया, अगले 3 घंटों के

काल-प्रभावन ने इसे बढ़ाकर 85 कर दिया। साइन-वक्र के दो अर्धखण्डों में धारा-संरचना असमान थी। धनात्मक अर्धखण्ड में विभिन्न आयामों वाले अनेक एच० एफ० स्पन्द पाये गये, जब कि ऋणात्मक अर्धखण्ड में केवल एक ही स्पन्द था। धनात्मक अर्धखण्ड में किरणन ने एच० एफ० स्पन्दों के आयामों को तो घटा दिया किन्तु उनकी संख्या को बढ़ा दिया।

#### स्लीव-उत्तेजन

दोनों स्लीवों के बीच में दीप्ति एकसमान वितरित थी। ऐसा प्रतीत हुआ कि नली की दीवार के सहारे विसर्जन हो रहा था। काल-प्रभावन से  $V_m$  लगभग 2% (2.16 से 2.11 kV) घट गया।  $V_m$  पर 90 मिनट के काल-प्रभावन ने  $-\Delta i$  को 3 से 33 तक बढ़ा दिया। धनात्मक तथा ऋणात्मक अर्धखण्डों में धारासंरचना सर्वसम थी।

विसर्जन के दौरान नली की दीवारों पर आयनों की बमबारी के कारण इलेक्ट्रोडों के कार्य-फलन में ह्रास होने के आधार पर, तीनों नलियों में प्रेक्षित, काल-प्रभावन से  $V_m$  में होने वाले अवनमन की व्याख्या की जा सकती है। दीवारें, जो इलेक्ट्रोडों का भी कार्य करती हैं, उनके कार्य-फलन में अवनमन द्वितीयक प्रक्रमों<sup>[6]</sup> ( $\gamma$  तथा  $\eta\theta g$  सदृश) के द्वारा इलेक्ट्रॉनों की मुक्ति में सहायक होता है, जिससे  $V_m$  में ह्रास होता है।

यह उल्लेखनीय है कि  $\Delta i$  का प्रेक्षण केवल तब ही हो पाया जब ओजोनित्र में विसर्जन के द्वारा कुछ क्षण दीप्ति उत्पन्न हो चुकी। इसी प्रकार के परिणाम अन्य दोनों नलियों के साथ प्राप्त हुए। विसर्जन के दौरान  $\Delta i$  के परिमाण पर होने वाले इस काल-प्रभावन के उल्लेखनीय प्रभाव पर जोशी<sup>[7]</sup> ने बल दिया है। उनका अभिगृहीत है कि  $\Delta i$  के प्रेक्षण के लिए मूल प्रतिबन्ध है न्यून कार्य-फलन वाले अधिशोषण-सदृश सीमान्त-तल या जोशी-तल की निर्मिति<sup>[2,3]</sup>। कुछ ही काल की क्षणदीप्तियों का  $\Delta i$  को निर्माण कर सकना प्रकट करता है कि वे 'नए' इलेक्ट्रोड जो बाह्य प्रकाश के प्रति संवेदनशील नहीं थे, विसर्जन के दौरान आयनों की बमबारी से प्रकाश-संवेदनशील हो गये। इन क्षणदीप्तियों के द्वारा उत्पन्न शल्य-वद्ध इलेक्ट्रॉनों के अवशेष इलेक्ट्रोडों की प्रकाश-संवेदनशीलता को बढ़ा देते हैं। इससे मुख्य उत्सर्जन अतः  $\Delta i$  बढ़ जाता है। वह काल-प्रभावन जो इलेक्ट्रोड के कार्य-फलन को घटाता है परिणामतः प्रकाश-इलेक्ट्रॉन-उत्सर्जन को बढ़ाता है, उसने  $-\Delta i$  को बढ़ाकर 6 से 60 कर दिया। अर्ध-ओजोनित्र तथा स्लीव उत्तेजनों में भी इसी कारण वृद्धि प्रेक्षित हुई है।

पूर्वप्रकाशन<sup>[8]</sup> के अनुसार, 'नए' ओजोनित्र में  $\Delta i$  का परिमाण अल्प होता है, जो काल-प्रभावन से बढ़ जाता है। नये निर्मित ओजोनित्र में विसर्जन के दौरान  $\Delta i$  का वर्धमान विकास प्रथम कोटि की अभिक्रिया के लिए समीकरण के अनुसार होता है।<sup>[9]</sup> नये निर्मित ओजोनित्र को क्लोरीन के सम्पर्क में पर्याप्त समय तक रखने मात्र से  $\Delta i$  का प्रेक्षण नहीं होता है।<sup>[10]</sup> इससे सिद्ध होता है कि  $\Delta i$  की उत्पत्ति के लिए विसर्जन के दौरान शोषण परम आवश्यक है। उन्होंने यह भी देखा कि वायु में  $\Delta i$  का परिमाण अल्प था, किन्तु विसर्जन के दौरान ओजोनित्र को क्लोरीन के साथ पूर्वतापित करने से उच्च  $\Delta i$  का

प्रेक्षण हुआ।<sup>[10]</sup> इसका कारण विसर्जन के दौरान क्लोरीन का शोषण है। प्रस्तुत अन्वेषण में प्राप्त परिणामों से पता लगता है कि विसर्जन के दौरान शोषण के साथ-साथ, विसर्जन के कारण इलेक्ट्रोडों के कार्य-फलन में ह्रास होने के कारण, मुख्य प्रकाश-इलेक्ट्रॉन-उत्सर्जन बढ़ जाता है, जिससे विसर्जन के दौरान इलेक्ट्रोडों की दीवारों पर इलेक्ट्रॉनों का वास्तविक रूप में निक्षेपण होने से  $-\Delta i$  में उल्लेखनीय वृद्धि होती है।

ओजोनित की तुलना में अर्ध-ओजोनित इस दृष्टि से तनिक भिन्न है कि इसमें कम व्यास का धातु का एक तार इसके आन्तरिक इलेक्ट्रोड का कार्य करता है। इस प्रकार की नली में क्षेत्र इस आन्तरिक तार के समीप केन्द्रित होता है। प्रबल क्षेत्र से निर्बल क्षेत्र में गति करने वाला इलेक्ट्रॉन प्रबल क्षेत्र में आयन-युग्मों को उत्पन्न करता है और निर्बल क्षेत्र परिसर में अपेक्षा से अधिक।<sup>[11]</sup> मोर्टन<sup>[12]</sup> ने पता लगाया है कि आयनीकरण-गुणांक के आधार पर परिकलित धारा की तुलना में असमान क्षेत्र में आयन-युग्मों का योग अतः धारा का मान अधिक होता है। मेज<sup>[13]</sup> ने ग्रेफाइट-विलेपित काँच-कैथोड-गणित्र का जो प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त अर्ध-ओजोनित से मिलता-जुलता है, प्रयोग किया। इस प्रकार की नली का व्यवहार ऐसा होता है जैसे कि भू-सम्पर्कित बाह्य लेप के प्रति उच्च प्रतिरोध तथा एक समान्तर धारिता के द्वारा आन्तरिक काँच-तल एक चालक कैथोड हो।<sup>[13]</sup>

मुक्त इलेक्ट्रॉनों को ऋण आयनों का सरलतम रूप माना जा सकता है; ये इलेक्ट्रॉन, विशेषतः तब जब इनकी गति मन्द होती है—जैसे अनुप्रयुक्त निम्न विभवों पर, अन्तराकाशी आवेश-प्रभाव के कारण, धारा में ह्रास  $-\Delta i$  उत्पन्न कर सकते हैं।<sup>[14]</sup>  $V_m$  के अत्यन्त समीप  $-\Delta i$  के अधिकतम होने की इससे व्याख्या सम्भव है।

आधुनिक निर्वात-तकनीक को प्रयुक्त करके, अपद्रव्यों की उपस्थिति का निराकरण करते हुए, टक्सन<sup>[14]</sup> ने  $O^-$ ,  $O_2^-$ ,  $NO_3^-$ ,  $OH^-$  ऋण आयनों के अस्तित्व का पता लगाया, किन्तु  $N^-$ ,  $N_2^-$ ,  $He^-$ ,  $A^-$  ऋण आयनों के अस्तित्व को संसूचित न कर सका।  $N$  की इलेक्ट्रॉन-बन्धुता  $-0.6\text{ eV}$  घोषित की गई है।<sup>[15]</sup> इलेक्ट्रॉन-बन्धुता का धनात्मक होना ऋण आयन के स्थायित्व का द्योतक है। इसका परिमाण जितना अधिक होता है, ऋण आयन उतना ही अधिक स्थायी होता है। नाइट्रोजन की इलेक्ट्रॉन-बन्धुता के ऋणात्मक होने से ऋण-अन्तराकाशी आवेश के बनने और नली-धारा को घटाने की नाइट्रोजन में सम्भावना नहीं है। अस्तु, नाइट्रोजन में उत्पन्न  $-\Delta i$  की बड़े परिमाण में प्रेक्षण की व्याख्या केवल इलेक्ट्रॉन द्वारा निर्मित अन्तराकाशी आवेश के अभिगृहीत पर ही सम्भव है।

नली में विसर्जन के द्वारा कुछ क्षणदीप्ति प्रवाहित होने पर ही  $\Delta i$  का प्रेक्षण होने से इस धारणा की पुष्टि होती है कि  $\Delta i$  के प्रेक्षण के लिए मुख्य उत्सर्जन का बहुत अधिक मात्रा में होना मौलिक आवश्यकता है।  $V_m$  के अत्यन्त समीप के विभव पर अधिकतम  $\Delta i$  का बिद्यमान होना और  $V$  के बनने से इसका घटना इस तथ्य के कारण है कि वह इलेक्ट्रॉन-अन्तराकाशी आवेश जो जोशी के अनुसार, किरणन के दौरान धारा में अवनमन उत्पन्न करता है, अनुप्रयुक्त विभव के बढ़ने के साथ इसका क्षय हो जाता है।<sup>[7]</sup>

### कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० के० टिक्कू के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

### निर्देश

1. मैस्से, एच० एस० डब्ल्यू०, "Negative Ions", कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1950.
2. जोशी, एस० एस०, करेंट साइन्स, 1946, 15, 281.
3. जोशी, एस० एस०, वही, 1947, 16, 19.
4. जोशी, एस० एस०, 1957, (व्यक्तिगत प्रेषण)
5. प्रसाद, जे०, काइनेटिका-आइ-कैटेलिज, 1977, 18, 497,  
बंगलादेश जर्न० साइंस इंडस्० रिस०, 1984, 19, 84.
6. लॉब, एल० बी०, "Fundamental Processes of Electrical Discharge through Gases", जॉनविले, न्यूयार्क, 1939.
7. जोशी, एस० एस०, प्रोसी० इन्डियन साइन्स काँग्रेस, अध्यक्षीय भाषण, रसायन विभाग, 1943, 51.
8. प्रसाद, जे०, ऐक्ट्स सिंथेसिया इन्डिका, 1974, 1, 13.
9. रमनमूर्ति, एम० बी०, जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०, 1948, 25, 255.
10. राव, के० बी०, प्रोसी० इन्डियन एफेड० साइन्स, 1948, 27, 72.
11. फॉन एन्जिल, ए०, नूबो सिम०, 1951, 8, 42.
12. मोर्टन, पी० एल०, फिजि० रिव्यू०, 1951, 70, 358.
13. मेज, आर०, जर्न० फिजि० रेडियम, 1946, 7, 164.
14. टक्सन, टी०, जेड० फिजि०, 1936, 103, 463.

## जीवाणु द्वारा जल का प्रकाशअपघटनी विखण्डन

कृष्ण बहादुर, एस० रंगनायक तथा शैलजीत सिंह

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[ प्राप्त—जुलाई 15, 1991 ]

### सारांश

जीवाणु में नाइट्रोजन तथा कार्बन डाइ आक्साइड को स्थिर करने एवं जल अणु को विखण्डित करने की क्षमता पाई गई। यह जल विखण्डन प्रकाशजैविक जैसा है।

### Abstract

Photolytic splitting of water by Jeewanu. By Krishna Bahadur, S. Ranganayaki and Shail Jeet Singh, Chemistry Department, Allahabad University.

Jeewanu, the protocells synthesised by the action of light on sterilised aqueous mixtures of ammonium molybdate, diammonium hydrogen phosphate, biological mineral and formaldehyde have many of the biochemicals of the present day cell, have boundary wall with internal structures, materials with ferredoxin-like and nitrogenase-like activity and fix molecular nitrogen and carbon dioxide in sunlight and split water molecule. This splitting of water is photobiological-like.

किसी भी तन्त्र का स्थायित्व उस तन्त्र में से होकर ऊर्जा के प्रवाह के फलस्वरूप बढ़ जाता है। इसी ऊर्जा-प्रवाह से कुछ तन्त्र स्थायी बने और जीवन का सूत्रपात हुआ।

आखिर सबसे अधिक सजीव तन्त्रों में प्रवाहित होने वाली ऊर्जा का स्रोत क्या था? अनेक वैज्ञानिकों का मत है कि यह कार्बनिक पदार्थ था। उनके अनुसार परपोषी (heterotrophs) तथा स्वतोपोषी दो प्रकार के जीव थे जो पर्यावरण में पहले से विद्यमान कार्बनिक अणुओं पर आश्रित थे।<sup>[1]</sup> यूरे तथा मिलर का सुझाव है<sup>[2]</sup> कि जीवन के उद्गम के समय पृथ्वी पर प्रचुर कार्बनिक पदार्थ विद्यमान था। तब तो तन्त्र में ऊर्जा-प्रवाह को जैव पदार्थ की ऊर्जा का सदुपयोग समझा जाता था जिससे  $\text{CO}_2$  तथा  $\text{H}_2\text{O}$  उत्पन्न होते थे।

किन्तु अब विश्वास किया जाने लगा है कि जीवन की उत्पत्ति पृथ्वी के गौण वायुमण्डल में हुई जिसमें नाइट्रोजन, कार्बन डाइ आक्साइड तथा जल वाष्प मुख्य घटकों के रूप में थे<sup>[6]</sup> और समुद्र में अत्यल्प कार्बनिक पदार्थ था। सिलेन ने<sup>[4]</sup> गणना के बाद यह निष्कर्ष निकाला है कि अरबों वर्ष पूर्व सागर में 'पतले शोरबे' का बनना सम्भव नहीं था। इस तरह जीवन के उद्गम के प्रारम्भ काल से ही सजीव तन्त्रों के लिए ऊर्जा का अभाव था। सजीव तन्त्र ने इसका हल निकाला और जीवन का अस्तित्व हुआ।

'जीवाणु' आदि कोशिकाएँ हैं और कोशिकामय जीवन के पूर्वगामी हैं और निबीजित जलीय मिश्रण में सरल कार्बनिक तथा अकार्बनिक पदार्थों पर प्रकाश की क्रिया से संश्लेषित हुए हैं<sup>[6]</sup>। जीवाणु निर्माण की पुष्टि ब्रिस् ने इंग्लैंड स्थित अपनी प्रयोगशाला में कर दी है<sup>[6,7]</sup>। अमोनियम मालिब्डेट, डाइ अमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट, जैव खनिज तथा फार्मैलिडहाइड के निबीजित जलीय मिश्रण में प्रकाश की क्रिया से जीवाणु संश्लेषण की सामान्य विधि दी जा चुकी है<sup>[8]</sup>। इन कणों में परिसीमा भित्ति तथा आन्तरिक संरचना होती है<sup>[9]</sup>। इनमें वे अनेक जैवरसायन उपस्थित हैं जो आज की कोशिकाओं में पाये जाते हैं और उनका तात्विक विश्लेषण इस प्रकार है<sup>[8]</sup> 13.87% H, 9.22% N, 39.21% Mo तथा 2.21% P। इनके अतिरिक्त उनमें 0.18% Fe, 0.005% Mn, 0.003% Mg 0.003% K, 0.006% Ca तथा 0.10% Na भी पाया जाता है<sup>[10]</sup>।

ये कण अन्दर से वृद्धि करते हैं, कलि कायन द्वारा गुणन करते हैं और इनमें उपायचयी सक्रियता पायी जाती है<sup>[5,8,10]</sup>।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य जीवाणु में फेरेडाक्सिन की उपस्थिति की खोज करना था। फेरेडाक्सिन कई जैवरासायनिक रूपान्तरों में इलेक्ट्रॉन वाहक के रूप में कार्य करता है और समस्त ज्ञात जीव कोशिकाओं में उपस्थित रहता है। सूर्य प्रकाश में जल के प्रकाश जैविक विखण्डन में क्लोरोप्लास्ट-फेरेडाक्सिन-हाइड्रोजेनस तन्त्र कार्यशील रहता है।<sup>[12-14]</sup> जीवाणु में फेरेडाक्सिन जैसा पदार्थ पाया गया। इसकी विशेषता यह है कि प्राकृतिक फेरेडाक्सिनों की तरह प्रकाश या आक्सीजन द्वारा यह विनष्ट नहीं होता।

जीवाणु मिश्रण में प्रकाशरासायनिक उत्क्रमणीय इलेक्ट्रान-स्थानान्तरण देखा जाता है जिसके फलस्वरूप यह मिश्रण मालिब्डेनम के एक रूप के कारण प्रकाश में रखने पर नीला हो जाता है किन्तु अँधेरे में लाते ही यह रंगहीन हो जाता है।

यह देखा गया कि यदि जीवाणु तथा जल के मिश्रण को सूर्य प्रकाश में रखा जाय तो 10-15 मिनट बाद बुलबुले उठने लगते हैं। इस गैस को एकत्र किया जा सकता है। (देखें सारणी)

यही नहीं, जीवाणु में नाइट्रोजेनस-सदृश सक्रियता देखी गई। यदि जीवाणु के ऊपर के स्थान में ऐसिटिलीन रखी जाय और मिश्रण को धूप में रखा जाय तो एथिलीन बनती है। जीवाणु में CO<sub>2</sub> को स्थिर करने की क्षमता पाई गई है। फलस्वरूप जब सूर्य प्रकाश में रखे जीवाणु-जलमिश्रण में से होकर



CO<sub>2</sub> प्रवाहित की जाती है तो बाहर निकलने वाली गैस में असन्तुप्त हाइड्रोकार्बन उपस्थित रहते हैं<sup>[15]</sup>। यदि जीवाणु तथा जल के मिश्रण में से N<sub>2</sub> गैस प्रवाहित की जाय और मिश्रण को प्रकाश में रखा जाय तो नाइट्रोजन का यौगिकीकरण हो जाता है<sup>[16,17]</sup>।

## सारणी

जीवाणु द्वारा जल के विखण्डन से उत्पन्न गैस

परिस्थिति	समय	जल			जीवाणु + जल			
		A	B	C	A	B	C	D
अंधेरा								
प्रकाश	10.15	12.7	14.6	-1.9	13.7	13.5	+0.2	+2.1
	10.30	13.0	13.8	-0.8	14.6	1.25	+2.1	+2.9
	10.45	14.2	12.9	+1.3	15.5	11.6	+3.9	+2.6
	11.00	14.4	12.6	+1.8	15.9	11.1	+4.8	+3.0
अंधेरा	11.15	14.4	12.6	+1.8	15.9	11.1	+4.8	+3.0
	11.25	13.8	13.3	+0.5	15.3	11.9	+3.4	+2.9
	11.35	13.6	13.6	+0.0	15.0	12.2	+2.8	+2.8
	11.45	13.5	13.8	-0.3	14.8	12.3	+2.5	+2.8
प्रकाश	12.00	14.3	12.7	+1.6	15.6	11.5	+4.1	+2.5
	12.15	14.7	12.2	+2.5	16.1	10.9	+5.2	+2.7
	12.30	14.8	12.1	+2.7	16.3	10.7	+5.6	+2.9
	12.45	14.9	12.0	+2.9	16.5	12.6	+5.9	+3.0
अंधेरा	12.55	14.2	10.2	+1.0	15.6	11.6	+4.0	+3.0
	8.05	13.9	13.3	+0.6	15.3	18.8	+3.5	+2.9
	1.15	13.7	13.4	+0.3	15.1	12.1	+3.0	+2.7
	1.30	14.6	12.3	+2.3	15.9	11.2	+4.7	+2.4
प्रकाश	1.45	14.8	12.1	+2.7	10.2	10.2	+0.6	-3.3
	2.00	15.0	12.0	+3.0	16.4	10.6	+5.8	+2.8
	2.15	15.0	12.0	+3.0	16.4	10.6	+5.8	+2.8

230

बहादुर, रंगनायकी तथा सिंह

अँधेरा	2.25	14.2	12.8	+1.4	15.6	11.5	+4.1	+2.7
	2.35	13.9	13.2	+0.7	15.4	11.8	+3.6	+2.9
	2.45	13.8	13.3	+0.5	15.2	11.9	+3.3	+2.8
प्रकाश	3.00	14.9	11.9	+3.0	16.5	10.6	+5.9	+2.9
	3.15	14.9	11.9	+3.0	16.3	10.3	+6.4	+3.4
	3.30	15.1	11.7	+3.4	16.9	10.2	+6.7	+3.3
	3.45	15.3	11.4	+3.9	17.0	10.0	+7.0	+3.1
अँधेरा	3.55	14.3	12.6	+1.7	15.9	11.1	+4.8	+3.1
	4.05	13.9	13.1	+0.8	15.3	11.7	+3.6	+2.8
	4.15	13.7	13.3	+0.4	14.9	12.0	+3.1	+2.7
	4.25	13.6	13.4	+0.2	14.9	12.0	+2.9	+2.7
परिस्थिति	समय	जीवाणु + पायरोगैलाल						
		A	B	C	D			
अँधेरा	10.15	10.3	16.3	-6.0	-4.1			
प्रकाश	10.30	11.5	14.3	-2.8	-2.0			
	10.45	12.1	13.3	-1.2	-2.5			
	11.00	12.3	12.9	-0.6	-2.4			
	11.15	12.3	12.9	-0.6	-2.4			
अँधेरा	11.25	11.3	14.7	-3.4	-3.9			
	11.35	11.0	15.1	-4.1	-4.1			
	11.45	11.0	15.1	-4.1	-3.8			
प्रकाश	12.00	11.9	13.4	-1.5	-3.1			
	12.15	12.3	12.8	-0.5	-3.0			
	12.30	12.4	12.7	-0.3	-3.0			
	12.45	12.5	12.7	-0.2	-3.1			

अँधेरा	12.55	11.5	14.5	-3.0	-4.0
	1.05	11.2	18.8	-3.6	-3.9
	1.15	11.2	84.8	-3.6	-3.9
प्रकाश	1.30	12.1	13.2	-1.1	-3.9
	1.45	12.3	13.0	-0.7	-3.4
	2.00	12.4	12.8	-0.4	-3.4
	2.15	12.4	82.8	-0.4	-3.4
अँधेरा	2.25	11.7	14.2	-2.5	-3.4
	2.35	11.5	14.4	-2.9	-3.6
	2.45	11.1	14.8	-3.7	-4.2
प्रकाश	3.00	12.4	12.8	-0.4	-3.4
	3.15	12.6	12.6	-0.0	-3.0
	3.30	12.8	11.2	+0.6	-2.8
	3.45	12.8	12.0	+0.8	-3.1
अँधेरा	3.55	11.8	13.8	-2.0	-1.9
	4.05	11.5	12.4	-0.9	-4.2
	4.15	11.1	14.9	-3.8	-1.7
	4.25	11.0	15.0	-3.9	-4.1

## सारणी के संकेत

$A$  = मैनोमीटर की रीडिंग-खुली भुजा में, सेमी० पारद

$B$  = बारबुर्ग फ्लास्क से संयुक्त भुजा में मैनोमीटर रीडिंग, सेमी० पारद

$C$  = बारबुर्ग के फ्लास्क में दाब—सेमी० पारद

$D$  = बारबुर्ग फ्लास्क में दाब—सेमी० पारद (जल अन्य फ्लास्क में रखे जल के दाब की रीडिंग को घटाकर प्राप्त) ।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० एस० जे० सिंह आर्थिक सहाय्य के लिए सी० एस०आई० आर०, नई दिल्ली का आभारी हैं।

## निर्देश

1. ओपेरिन, ए० आई०, In : The Origin-of Life. J. D. Bernal, Cleveland : World 1967/1924.
2. हाल्डेन, जे० बी० एस०, In : The Origin of Life. J. D. Bernal. Ed., pp. 243-51, Cleveland : World. (1967/1928).
3. एबलसन, पी० एच०, Proc. Nat. Acad. Sci. V. S., 1966 55, 1365.
4. सिलेन, एल० जी०, Arkiv. Kemi., 1965, 24, 431.
5. बहादुर, के० इत्यादि, Zbl. Bakt. 1964, 117, (2), 567-602.
6. ब्रिस, एम० एच०, Fourth International Conference on Photobiology, Aug. 1964, Oxford.
7. वही, Spaceflight 1965, 7(4), 129-131.
8. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस०, J. Brit. Interplanetary Soc. 1970, 23, 813-829.
9. सिंह, वाई० पी०, D. Phil. Thesis, Chemistry Department, Univ. Allahabad, India (1975).
10. हफमैन, डब्लू० डी० Huffman Laboratories Inc. (1980), Lab. No. 11127901, Dec. 7, 1979.
11. बहादुर, के० रंगनायकी, एम० कुमार, ए० तथा श्रीवास्तव, पी०, Zbl. Bakt., 1966, 120(2) 740-752.
12. बेहेमान, जे० आर०, बेरेन्सन, जे० ए०, कैप्लान, एन० ओ० तथा कामेन, एम० डी०, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1973, 70, 2317-2320.
13. राव, के० के०, रोसा, एल० तथा हाल, डी० ओ०, Biochem. Biophys. Res. Comm., 1976, 68, 21-27.
14. फ्राई, आई०, पापेनेनोगिड, जी०, टेल ओर, ई० तथा पैकर, एल० Z. Natureforsch., 1977 32C, 110-117.
15. रंगनायकी, एस०, सजल कुमार तथा बहादुर, के०, J. Brit. Interplanetary Soc. 1981, 34, 251-54.
16. गुप्ता, वी० के०, D. Phil. Thesis, Chemistry Dept., Univ. Allahabad, India (1980).
17. वर्मा, पी० के० D. Phil. Thesis, Chemistry Dept., Univ. Allahabad, India (1980).

## बेसेल फलनों तथा जैकोबी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन के द्वि-विमीय प्रसार का एक नवीन वर्ग

एस० डी० बाजपेयी

गणित विभाग, बहरीन विश्वविद्यालय,  
ईसा टाउन, बहरीन

[प्राप्त—अगस्त 18, 1990]

### सारांश

इस प्रपत्र में बेसेल फलनों तथा जैकोबी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन के द्विविमीय प्रसार का एक नवीन वर्ग प्रस्तुत किया गया है।

### Abstract

A new class of two-dimensional expansion of Meijer's G-function involving Bessel functions and Jacobi polynomials. By S.D. Bajpai, Department of Mathematics, University of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain

In this paper, we present a new class of two-dimensional expansion of Meijer's G-function involving Bessel functions and Jacobi polynomials.

1. प्रस्तावना—प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य बेसेल फलनों तथा जैकोबी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन [3 pp. 206-222] के द्विविमीय प्रसार के लिए एक नया वर्ग प्रवर्तित करना एवं इस वर्ग के एक द्वि-विमीय प्रसार को प्रस्तुत करना है।

उपपत्ति में निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी—

समाकल [1, p. 177, (2.1)] :

$$\int_{-1}^1 (1-y)^\sigma (1+y)^\beta P_v^{(\alpha, \beta)}(y) G_{p,q}^{m,n} [z(1-y)^\lambda \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. ] dy$$

$$= \frac{2^{\beta+\sigma+1} \Gamma(\beta+\nu+1)}{\lambda^{\beta+1} \nu!} G_{p+2\lambda, q+2\lambda}^{m+\lambda, n+\lambda} \left[ z^{2\lambda} \begin{vmatrix} \Delta(\lambda, -\sigma), a_p, \Delta(\lambda, \alpha-\sigma) \\ \Delta(\lambda, \alpha-\sigma+\nu), b_q, \Delta(\lambda, -1-\beta-\sigma-\nu) \end{vmatrix} \right],$$

जहाँ  $\lambda$  घन पूर्णांक है, (1.1)

$$2(m+n) > p+q, |\arg z| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi, \operatorname{Re} \beta > -1,$$

$$\operatorname{Re}(\rho+\lambda b_j) > -1 (j=1, \dots, m).$$

पूर्णांक [2, p. 285, (2.1)] :

$$\int_0^\infty e^{ix} x^\rho J_\nu(x) G_{p,q}^{m,n} \left[ zx^\delta \begin{vmatrix} a_p \\ q_q \end{vmatrix} \right] dx$$

$$= \frac{e^{1/2i(\rho+\nu+1)} \pi (2\pi)^{1/2(1-\delta)}}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\rho+1} \delta^{-\rho}} G_{p+2\delta, q+\delta}^{m+\delta, n+\delta} \left[ z \left( \frac{\delta e^{\pi i/2}}{2} \right)^\delta \begin{vmatrix} \Delta(\delta, -\rho-\nu), a_p, \Delta(\delta, \nu-\rho) \\ \Delta(\delta, -\rho-\frac{1}{2}), b_q \end{vmatrix} \right],$$

जहाँ  $\delta$  घन पूर्णांक है, (1.2)

$$p+q < 2(m+n), |\arg z| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi,$$

$$\operatorname{Re}(\rho+\nu+\delta b_j) > -1 (j=1, \dots, m),$$

$$\operatorname{Re}(\rho+\delta(a_j-1)) < -\frac{1}{2} (j=1, \dots, n).$$

जैकोबी बहुपदों [4, p. 285, (5) एवं (9)] का लाम्बिकता गुण

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx$$

$$= 0, \text{ यदि } m \neq n,$$
(1.3)

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, \text{ यदि } m=n;$$

जहाँ

$$\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1.$$

बेसेल फलनों का लाम्बिकता गुण [5, p. 291, (6)] :

$$\int_0^\infty x^{-1} J_{\nu+2n+1}(x) J_{\nu+2n+1}(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{यदि } m \neq n, \\ (4n+2\nu+2)^{-1}, & \text{यदि } m=n, \operatorname{Re} \nu+m+n > -1. \end{cases}$$
(1.4)

## 2. द्वि-विमीय प्रसार

जिस द्वि-विमीय प्रसार की स्थापना की जानी है वह है—

$$e^{ix} x^\rho (1-y)^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left[ zx^\delta (1-y)^\lambda \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{2^{1-\rho+\sigma} (\pi)^{1/2(1-\delta)}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \delta^{1-\rho} \lambda^{1+\beta}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} e^{1/2i(\rho+v+2r+1)\pi} \frac{(v+2r+1)(\alpha+\beta+2t+1)\Gamma(\alpha+\beta+t+1)}{\Gamma(\alpha+t+1)}$$

$$J_{v+2r+1}(x) P_t^{(\alpha,\beta)}(y)$$

$$\times G_{p+2\delta+2\lambda, q+\delta+2\lambda}^{m+\delta+\lambda, n+\delta+\lambda} \left[ z \left( \frac{\delta e^{i/2}}{2} \right)^\delta 2^\lambda \left| \begin{matrix} \Delta(\delta, -\rho-v-2r), \Delta(\lambda, -\alpha-\sigma), a_p \\ \Delta(\delta, 2-\rho+v+2r), \Delta(\lambda, -\sigma) \\ \Delta(\delta, \frac{1}{2}-\rho), \Delta(\lambda, t-\sigma), b_q \\ \Delta(\lambda, -1-\alpha-\beta-\sigma-t) \end{matrix} \right. \right], \quad (2.1)$$

जो (1.1), (1.2), (1.3) एवं (1.4) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

उपपत्ति : माना

$$f(x,y) = e^{ix} x^\rho (1-y)^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left[ zx^\delta (1-y)^\lambda \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right]$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{r,t} J_{v+2r+1}(x) P_t^{(\alpha,\beta)}(y). \quad (2.2)$$

समीकरण (2.2) वैध है क्योंकि  $f(x,y)$  संतत है और क्षेत्र  $0 < x < \infty, -1 < y < 1$  में परिबद्ध विचरण वाला है।

(2.2) के दोनों पक्षों में  $(1-y)^\alpha (1+y)^\beta P_v^{(\alpha,\beta)}(y)$  से गुणा करने तथा  $-1$  से  $1$  तक  $y$  के प्रति समाकलित करने के बाद (1.1) तथा (1.3) का उपयोग करने पर प्राप्त व्यंजक के दोनों पक्ष में  $x^{-1} J_{v+2u+1}(x)$  से गुणा करने तथा  $0$  से  $\infty$  तक  $x$  के प्रति समाकलन करने के बाद (1.2) एवं (1.4) का उपयोग करने पर हमें  $C_{r,t}$  का मान प्राप्त होता है। अब (2.2) में  $C_{r,t}$  का मान रखने पर प्रसार (2.1) प्राप्त हो जाता है।

टिप्पणी :

उपर्युक्त विधि का सम्प्रयोग करने पर हम (1.1) तथा (1.2) की सहायता से इसी श्रेणी के दो विमीय प्रसारों के तीन अन्य रूप प्राप्त कर सकते हैं।

## निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी०, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 1968, 11 (3), 177-191
2. वही, Proc. Indian Acad. Sci., 1968, 68A, 285-290.
3. एर्डेली, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग 1, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
4. वही, Tables of Integral Transforms, भाग 2, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
5. ल्यूक, वाई०एल०, Integrals of Bessel functions. मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1962.



## 2-दूरीक समष्टि में संकुचनीय पुनरावृत्तिकधारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु

विजयेन्द्र कुमार, सुचरिता रंगानाथन तथा श्यामलाल सिंह  
गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार

[प्राप्त—अक्टूबर 28, 1990]

### सारांश

इस प्रपत्र में 2-दूरीक समष्टि पर एक स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किया गया है जो सहगल<sup>[1]</sup> व रंगानाथन आदि<sup>[6]</sup> के प्रमेयों को 2-दूरीक समष्टि पर विस्तारित एवं व्यापकीकृत करता है।

### Abstract

Fixed points of mappings with contractive iterate on 2-metric spaces. By Vijayendra Kumar, Sucharita Rangnathan and Shyam Lal Singh, Mathematics Department, Gurukul Kangari Vishwavidyalaya, Hardwar.

Let  $(X, d)$  be a complete 2-metric space with  $d$  continuous, and  $f: X \rightarrow X$  a mapping satisfying the condition : there exist non-negative numbers  $\alpha, \beta, \gamma$  with  $\alpha + 2\beta + \gamma < 1$  such that for each  $x \in X$  there is a positive integer  $n(x)$  such that for all  $y, a \in X$ ,

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y, a)$$

$$\leq \alpha d(x, f^{n(x)}x, a) + \beta d(x, f^{n(x)}y, a) + \gamma d(x, y, a).$$

Then  $f$  has a unique fixed point  $u$  and  $\{f^n x_0\}$  converges to  $u$  for each  $x_0 \in X$ .

### 1. प्रस्तावना :

मान लें कि  $(M, d)$  एक पूर्ण दूरीक समष्टि है और  $f: M \rightarrow M$ । बानाख संकुचन सिद्धान्त के विभिन्न व्यापकीकरणों में सहगल<sup>[9]</sup> द्वारा प्रदत्त निम्न परिणाम (प्रमेय 1) स्थिर बिन्दु सिद्धान्त में प्रमुख स्थान रखता है।

**प्रमेय 1 :**

मान लें कि पूर्ण दूरीक समष्टि  $M$  पर  $f$  एक संतत प्रतिचित्रण इस प्रकार है कि घनात्मक संख्या  $k < 1$  हेतु  $M$  के प्रत्येक बिन्दु  $x$  के लिए एक घनात्मक पूर्ण संख्या  $n(x)$  का ऐसा अस्तित्व होता है कि समष्टि  $M$  के प्रत्येक बिन्दु  $y$  के लिये

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y) \leq kd(x, y) \quad (1.1)$$

संतुष्ट होता है। तब प्रतिचित्रण  $f$  एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु रखता है।

उक्त प्रमेय में  $f^n$  का तात्पर्य प्रतिचित्रण  $f$  के  $n$ वें पुनरावृत्तिक से है। कालान्तर में प्रमेय 1 का कुछ गणितज्ञों द्वारा व्यापकीकरण एवं विस्तारण हुआ। दूरीक समष्टि में व्यापकीकरण करने वाले प्रमुख गणितज्ञ हैं किरिक<sup>[1]</sup>, गुसमान<sup>[2]</sup>, आईसेकी<sup>[3]</sup>, खजाञ्ची<sup>[4]</sup>, मटकोवस्की<sup>[5]</sup> तथा रे एवं रोअड्स<sup>[7]</sup>। चुमकी पंजा एवं बैण्णव ने प्रमेय 1 का विस्तारण समपरिवेश समष्टि में किया है। सुचरिता रंगनाथन<sup>[6]</sup> ने उक्त प्रमेय का विस्तारण 2-दूरीक समष्टि में किया। इस प्रपत्र के आगामी अनुभाग में रीच<sup>[8]</sup> द्वारा अध्ययन किये गये प्रतिचित्रण की भावना का समादर करते हुये रंगनाथन के उक्त प्रमेय का व्यापकीकरण किया जायेगा।

**2. स्थिर बिन्दु प्रमेय :****प्रमेय 2 :**

मान लें कि  $(X, d)$  एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें  $d$  संतत है। यदि  $X$  पर एक प्रतिचित्रण  $f$  इस प्रकार हो कि ऋणेतर संख्याओं  $\alpha, \beta, \nu$  (जहाँ  $\alpha + 2\beta + \nu < 1$ ) के लिये समष्टि  $X$  के प्रत्येक अवयव  $x$  हेतु एक घनात्मक पूर्णांक  $n(x)$  का ऐसा अस्तित्व प्राप्त होता है कि  $X$  के सभी  $y, a$  के लिये प्रतिबन्ध

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y, a) \quad (2.1)$$

$$\leq \alpha d(x, f^{n(x)}x, a) + \beta d(x, f^{n(x)}y, a) + \nu d(x, y, a).$$

संतुष्ट होता हो, तब प्रतिचित्रण  $f$  का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु (मान लें  $u$ ) होता है तथा  $X$  के प्रत्येक  $x_0$  के लिये  $\{f^n x_0\}$  बिन्दु  $u$  पर अभिसरित होता है।

इस प्रमेय की उपपत्ति हेतु निम्नलिखित प्रमेयिका का प्रयोग होगा।

**प्रमेयिका :**

यदि  $X$  पर प्रतिचित्रण  $f$  समष्टि  $X$  के प्रत्येक बिन्दु  $x$  के लिये प्रमेय 1 के प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता हो तो  $X$  के प्रत्येक  $a$  के लिये  $\nu(x) = \text{उच्चक } d(f^n x, x, a) \text{ परिमित है।}$

प्रमेयिका की उपपत्ति :

मान लें  $X$  के  $x$  तथा समस्त  $a$  के लिये

$$v(x) = \text{अधिकतम } \{d(f^k x, x, a) : k=0, 1, 2, \dots, n(x)\}.$$

किसी घनात्मक पूर्णांक  $n$  के लिये, मान लें  $r \geq 0$  और  $0 \leq s < n(x) - 1$

इस प्रकार है कि

$$n = vn(x) + s.$$

तब

$$\begin{aligned} & d(x, f^{rn(x)+s} x, a) \\ & \leq d(x, f^{n(x)} x, a) + d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a) \\ & \quad + d(f^{n(x)} x, f^{rn(x)+s} x, x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.1) से, (2.2) के दायें पक्ष में अंतिम पद का मान शून्य है। पुनः (2.1) से

$$\begin{aligned} & d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a) \\ & \leq \alpha d(x, f^{n(x)} x, a) + \beta d(x, f^{rn(x)+s} x, a) \\ & \quad + v d(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a) \\ & \leq \alpha e(x) + \beta [d(x, f^{n(x)} a, a) + d(x, f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x) \\ & \quad + d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a)] + v d(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a) \end{aligned}$$

अर्थात्

$$\begin{aligned} & d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a) \\ & \leq p e(x) + q d(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a) \end{aligned}$$

जहाँ

$$p = \{(\alpha + \beta)/(1 - \beta)\} < 1, \quad q = \{v/(1 - \beta)\} < 1.$$

इसलिये (2.2) से,

$$\begin{aligned} & d(x, f^{rn(x)+s} x, a) \\ & \leq (1+p)e(x) + q d(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a). \end{aligned}$$

इस असमिका का  $(r-1)$  बार उपयोग करते पर

$$d(x, f^{rn(x)+s} x, a)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+p)e(x)[1+q+q^2+\dots+q^{r-1}]+q^r d(x, f^s x, a) \\
&\leq (1+p)e(x)[1+q+q^2+\dots+q^{r-1}]+q^r e(x) \\
&\leq (1+p)e(x)[1+q+q^2+\dots+q^{r-1}+q^r] \\
&\leq (1+p)e(x)/(1-q).
\end{aligned}$$

प्राप्त होता है।

चूँकि  $n=rn(x)$  यादृच्छिक है अतः  $r(x)$  परिमित है।

प्रमेय की उपपत्ति :

मान लें  $x$  मनमाना है। मान लें

$$m_0=n(x_0), x_1=f^{m_0}x_0$$

और उत्तरोत्तर क्रम में

$$m_i=n(x_i), x_{i+1}=f^{m_i}x_i.$$

सर्वप्रथम हम यह दर्शाते हैं कि  $t \geq i$  के लिये

$$d[x_i, x_{i+1}, x_t]=0 \quad (2.3)$$

अतः  $t$  का मान  $i$  अथवा  $i+1$  है। मान लें  $t > i+1$ . तब

$$\begin{aligned}
x_i &= f^{m_{t-1}} x_{t-1} = f^{m_{t-1}} f^{m_{t-2}} x_{t-2} = \dots \\
&= f^\lambda f^{m_i} x_i, \quad \lambda = m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_{t-1} \\
&= f^{m_i} (f^\lambda x_i).
\end{aligned}$$

इसलिए (2.1) से

$$d(x_{i+1}, x_t, x_i) = d(f^{m_i} x_i, f^\lambda x_i, x_i) = 0.$$

तथा (2.1) से ही

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_1, a) &= d(f^{m_0} f^{m_1} x_0, f^{m_0} x_0, a) \\
&\leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta d(x_0, x_2, a) + \nu d(x_0, f^{m_1} x_0, a) \\
&\leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta [d(x_0, x_1, a) + d(x_2, x_1, a) \\
&\quad + d(x_0, x_2, x_1)] + \nu d(f^{m_1} x_0, x_0, a)
\end{aligned}$$

क्योंकि (2.3) से

$$d(x_0, x_2, x_1) = 0$$

इसलिए

$$\begin{aligned} & d(x_2, x_1, a) \\ & \leq pd(x_1, x_0, a) + qd(f^{m_1}x_0, x_0, a) \end{aligned} \quad (2.4)$$

जहाँ  $p$  तथा  $q$  के मान वही हैं जो प्रमेयिका की उपपत्ति में माने गये हैं।

इसी प्रकार

$$\begin{aligned} & d(x_2, x_2, a) \\ & \leq pd(x_2, x_1, a) + qd(f^{m_2}x_1, x_1, a). \end{aligned} \quad (2.5)$$

और (2.1) ही से,

$$\begin{aligned} & d(f^{m_2}x_1, x_1, a) = d(f^{m_0}f^{m_2}x_0, f^{m_0}x_0, a) \\ & \leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta d(x_0, f^{m_2}x_1, a) + \nu d(x_0, f^{m_2}x_0, a) \\ & \leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta [d(x_0, x_1, a) + d(f^{m_2}x_1, x, a) \\ & \quad + d(x_0, f^{m_2}x_1, x_1)] + \nu d(f^{m_2}x_0, x_0, a), \end{aligned}$$

क्योंकि (2.1) से

$$d(x_0, f^{m_2}x_1, x_1) = d(f^{m_0}x_0, f^{m_0}f^{m_2}x_0, x_0) = 0$$

इसलिये

$$\begin{aligned} & d(f^{m_2}x_1, x_1, a) \\ & \leq pd(x_1, x_0, a) + qd(f^{m_2}x_0, x_0, a) \end{aligned} \quad (2.6)$$

प्राप्त होता है।

अतः (2.4) तथा (2.6) से (2.5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} & d(x_2, x_2, a) \\ & \leq p(p+q)d(x_1, x_0, a) + pqd(f^{m_1}x_0, x_0, a) + q^2d(f^{m_2}x_0, x_0, a). \end{aligned}$$

व्यापक रूप में,

$$\begin{aligned} & d(x_{n+1}, x_n, a) \\ & \leq p(p+q)^{n-1} d(x_1, x_0, a) + pq(p+q)^{n-2} d(f^{m_1}x_0, x_0, a) + pq^2(p+q)^{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times d(f^{m_2}x_0, x_0, a) \dots + pq^{n-1} d(f^{m_{n-1}}x_0, x_0, a) q^n d(f^{m_n}x_0, x_0, a) \\
& \leq [p(p+q)^{n-1} + pq(p+q)^{n-2} + pq^2(p+q)^{n-3} + \dots + pq^{n-1} + q^n] r(x_0) \\
& = (p+q)^n r(x_0)
\end{aligned}$$

अर्थात्

$$d(x_{n+1}, x_n, a) = k^n r(x_0) \quad (2.7)$$

जहाँ

$$k = p+q < 1.$$

$m < n$  के लिये (2.7) का बारम्बार उपयोग करने पर,

$$\begin{aligned}
& d(x_m, x_n, a) \\
& \leq d(x_m, x_{m+1}, a) + d(x_{m+1}, x_n, a) + d(x_m, x_n, x_{m+1}) \\
& \leq k^m r(x_0) + d(x_{m+1}, x_n, a) \\
& [\because (2.3) \text{ से } d(x_m, x_n, x_{m+1}) = 0]
\end{aligned}$$

अतः

$$\begin{aligned}
& d(x_m, x_n, a) \\
& \leq k^m r(x_0) + k^{m+1} r(x_0) + d(x_{m+2}, x_n, a) \\
& \leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) r(x_0) \\
& < \{k^m / (1-k)\} r(x_0).
\end{aligned}$$

क्योंकि  $r(x_0)$  परिमित है, अतः जैसे ही  $m, n$  को अनन्त लेते हैं

$$d(x_m, x_n, a) \rightarrow 0$$

इसलिये  $\{x_n\}$  कौशी अनुक्रम है अतः अभिसारी है। मान लें  $\{x_n\}$  बिन्दु  $u$  पर अभिसारित होता है। (2.1) से

$$\begin{aligned}
& d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, a) \\
& \leq \alpha d(u, f^{n(u)}u, a) + \beta d(u, f^{n(u)}x_n, a) + \gamma d(u, x_n, a) \\
& \leq \alpha d(u, f^{n(u)}u, a) + \beta [d(u, x_n, a) + d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\
& \quad + d(u, f^{n(u)}x_n, x_n)] + \gamma d(u, x_n, a)
\end{aligned}$$

और

$$d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, x_n) \\ \leq \alpha d(u, f^{n(u)}u, x_n) + \beta d(u, f^{n(u)}x_n, x_n) + 0,$$

निम्न असमिका

$$d(u, f^{n(u)}u, a) \\ \leq d(u, x_n, a) + d(u, f^{n(u)}u, x_n) + d(x_n, f^{n(u)}u, a) \\ \leq d(u, x_n, a) + d(u, f^{n(u)}u, x_n) + d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\ + d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, a) + d(x_n, f^{n(u)}u, f^{n(u)}x_n)$$

से

$$(1-\alpha)d(u, f^{n(u)}u, a) \tag{2.8} \\ \leq (1+\beta+v)d(u, x_n, a) + (1+\alpha)d(u, f^{n(u)}u, x_n) \\ + (1+\beta)d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) + 2\beta d(x_n, f^{n(u)}x_n, u)$$

प्राप्त होता है।

(2.1) से

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) = d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}}f^{n(u)}x_{n-1}, a) \\ \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n, a) + \beta d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_n, a) + v d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a) \\ \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n, a) + \beta [d(x_{n-1}, x_n, a) + d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\ + d(x_{n-1}, x_n, f^{n(u)}x_n)] + v d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a).$$

क्योंकि (2.1) से

$$d(x_{n-1}, x_n, f^{n(u)}x_n) = d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}}f^{n(u)}x_{n-1}, x_{n-1}) = 0,$$

इसलिये

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \leq p d(x_{n-1}, x_n, a) + q d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a)$$

जहाँ  $p$  और  $q$  के मान वही हैं जो प्रमेयिका की उत्पत्ति में माने गये हैं। (2.7) के आलोक में, हमें

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \leq p k^{n-1} r(x_0) + q d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a),$$

( जहाँ  $k = p + q < 1$  ).

प्राप्त होता है।

इस असमिका का  $(n-1)$  बार उपयोग करने से,

$$\begin{aligned} & d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\ & \leq [pk^{n-1} + pqk^{n-2} + pq^2k^{n-3} + \dots + pq^{n-2}k + pq^{n-1} + q^n]r(x_0) \\ & \leq r(x_0)[p(p+q)^{n-1} + pq(p+q)^{n-2} + pq^2(p+q)^{n-3} + pq^{n-2}(p+q) + pq^{n-1} + q^n] \\ & = r(x_0)(p+q)^n \end{aligned}$$

प्राप्त होता है।

अर्थात्

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \leq k^n r(x_0). \quad (2.9)$$

इसी प्रकार

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, u) \leq k^n r(x_0). \quad (2.10)$$

(2.9) तथा (2.10) से (2.8) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} & (1-\alpha)d(u, f^{n(u)}u, a) \\ & \leq (1+\beta+v)d(u, x_n, a) + (1+\alpha)d(u, f^{n(u)}u, x_n) + (1+3\beta)k^n(x_0) \end{aligned}$$

प्राप्त होता है।

इसमें  $n$  को अनन्त लेने पर,

$$(1-\alpha)d(u, f^{n(u)}u, a) \leq 0$$

प्राप्त होता है।

अतः

$$u = f^{n(u)}u.$$

इसलिये  $u$  प्रतिचित्रण  $f^{n(u)}$  का स्थिर बिन्दु है।

मान लें  $\tilde{v}(u)$  से भिन्न है ) भी  $f^{n(u)}$  का स्थिर बिन्दु है। तब (1) से,  $X$  के प्रत्येक  $a$  के लिये

$$d(u, v, a)d(f^{n(u)}u, f^{n(u)}v, a) \leq (\beta+v)d(u, v, a).$$

अतः

$$u = v.$$

इस प्रकार  $u$  अद्वितीय है।



क्योंकि

$$u = f^{n(u)}u$$

इस कारण से

$$fu = f^{n(u)}fu$$

यह दर्शाता है कि  $fu$  भी  $f^{n(u)}$  का स्थिर बिन्दु है। अतः  $u = fu$  अविलम्ब है। अभी यह सिद्ध करना शेष है कि

$$\text{सीमा } n \rightarrow \infty \text{ पर } f^n x_0 = u.$$

मान लें,  $X$  के समस्त  $a$  के लिये,

$M = \text{अधिकतम}$

$$\{d(f^m x_0, u, a) : m = 0, 1, 2, \dots, n(u)-1\}$$

यदि  $n$  पर्याप्त बृहत् पूर्णांक है, तब

$$n = rn(u) + s, \quad 0 \leq s < n(u), \quad r > 0,$$

और (2.1) से

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, u, a) &= d(f^{rn(u)+s} x_0, f^{n(u)} u, a) \\ &\leq \beta d(u, f^n x_0, a) + \nu d(u, f^{(r-1)n(u)+s} x_0, a) \end{aligned}$$

अथवा

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, u, a) &= d(f^{rn(u)+s} x_0, u, a) \\ &\leq q d(f^{(r-1)n(u)+s} x_0, u, a) \leq q^2 d(f^{(r-2)n(u)+s} x_0, u, a) \end{aligned}$$

$$\leq q^r d(f^s x_0, u, a)$$

$$\leq q^r M \rightarrow 0.$$

( $n$  को अनन्त लेने पर)

अतः  $\{f^n x_0\}$  समष्टि  $X$  के प्रत्येक  $x_0$  के लिये  $u$  पर अभिसरित होता है।

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी :

रंगनाथन<sup>[6]</sup> की प्रमेय इस प्रमेय की  $\alpha = \beta = 0$  तथा  $\nu$  एक नियतांक के लिये विशेष स्थिति है।

## निर्देश

1. किरिक, एल० बी०, Publ. Inst. Mat. (Beograd) 1974, 17, 52-58.
2. गुसमान, एल० एफ० जू०, Proc. Amer. Math. Soc. 1970, 26, 615-618.
3. आइसेकी, कियोसी, Nanta Math. 1976, 9, 54-58.
4. खजाञ्ची, ललिता, Math. Japon. 1974, 19, 283-289.
5. मटकोवस्की, जे०, Proc. Amer. Math. Soc. 1977 26, 344-348.
6. रंगानाथन, सुचरिता, Ph. D. Thesis, B.H.U., Varanasi, 1978.
7. रे, बी० के० तथा रोमड्स, बी० ई०, Pac. J. Math. 1977, 71, 517-520.
8. रीच, एस०, Bull. Un. Mat. Ital., 1971, 4, 1-11.
9. सहगल, बी० एम०, Proc. Amer. Math. Soc. 1969, 23, 631-634.

## बहुचर H-फलन के प्राचलों के प्रति समाकलन

अशोक रोंघे

गणित विभाग, एस० एस०एल० जैन कनिष्ठ महाविद्यालय, विदिशा (म०प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 19, 1990]

### सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में बहुचर H-फलन सम्बन्धी कतिपय समाकलनों का मान ज्ञात किया गया है जहाँ समाकलन बहुचर H-फलन के प्राचलों के प्रति सम्पन्न किया गया है। विशिष्ट दशाओं के रूप में कुछ ज्ञात सम्बन्ध भी प्राप्त किये गये हैं।

### Abstract

**Integration of multivariable H-function with respect to parameters.** By Ashok Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain Kanishtha Mahavidyalay, Vidisha (M.P.).

In this paper few integrals involving multivariable H-function have been evaluated, where the integration has been performed with respect to parameters of multivariable H-functions. Few known relations have been obtained as particular cases.

### 1. विषय प्रवेश :

श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल<sup>[1]</sup> ने पहले ही कई सम्मिश्र चरों वाले H-फलन अथवा बहुचर H-फलन का प्रवर्तन तथा अध्ययन किया है, किन्तु गोयल<sup>[2]</sup> तथा गर्ग<sup>[4]</sup> के दो चरों वाले H-फलन के संकेतन के समान हम निम्नांकित संकेतन का उपयोग करेंगे, जो अधिक संक्षिप्त तथा स्वतः व्याख्यात्मक है :

$$\begin{aligned}
 H[z_1, \dots, z_r] &= H_{p, q: \{p_i, q_i\}}^{o, n: \{m_i, n_i\}} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j: \alpha'_j, \dots, \alpha_j^{(r)})_{1p} : (C_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)})_{1pi} \\ (b_j: \beta'_j, \dots, \beta_j^{(r)})_{1q} : (d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1qi} \end{matrix} \right] \\
 &= H_{p, q: \{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r\}}^{o, n: \{m_1, n_1, \dots, m_r, n_r\}} \left[ \begin{matrix} z_1, \dots, z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N: R \\ M: T \end{matrix} \right] \\
 &= 1/(2\pi\omega)^r \int_{L_1} \dots \int_{L_r} \phi(s_1, \dots, s_r) \prod_{j=1}^n \{\theta_i(s_i)(z_i)^{s_i} ds_i\}, \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

जहाँ

$$\omega = \sqrt{(-1)}, i = (1, \dots, r), N = (a_j: \alpha'_j, \dots, \alpha_j^{(r)})_{1p} \quad (1.2)$$

$$R = (c_j^{(i)}, F_j^{(i)})_{1, pi} \quad (1.3)$$

$$M = (b_j, \beta'_j, \dots, \beta_j^{(r)})_{1, q}, \quad (1.4)$$

$$T = (d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1, qi} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 \phi(s_1, \dots, s_r) &= \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j) + \sum_{i=1}^r (a_j^{(i)} s_i) \\
 &\left[ \prod_{j=1}^q \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^r \beta_j^{(r)} s_i) \prod_{j=1}^p (a_j - \sum_{i=1}^r \alpha_j^{(i)} s_i) \right]^{-1} \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_i(s_i) &= \prod_{j=1}^{m_i} \Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}) \prod_{j=1}^{n_i} \Gamma(1 - C_j^{(i)} + E_j^{(i)} s_i) \\
 &\left[ \prod_{j=-m_i+1}^{q_i} \Gamma(1 - d_j^{(i)} + \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=-n_i+1}^{p_i} \Gamma(C_j^{(i)} - E_j^{(i)} s_i) \right]^{-1}, \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

उपलिपि (i) में i डैशों की संख्या है, उदाहरणार्थ  $b^{(1)} = b'$ ,  $b^{(2)} = b''$  इत्यादि प्रतीक

$$(a_j: \alpha'_j, \dots, \alpha_j^{(r)})_{1p} \text{ प्राचलों } (a_1: \alpha'_1, \dots, \alpha_1^{(r)}), \dots, (a_p: \alpha'_p, \dots, \alpha_p^{(r)})$$

तथा  $(C_j, E_j)_{j=1}^p$  प्राचलों  $(C_1, E_1), \dots, (C_p, E_p)$  के संक्षिप्त रूप हैं। विस्तृत व्याख्या प्राचलों पर लगे प्रतिबन्धों बहुचर H-फलनों के उपगासी प्रसार के लिये सक्सेना श्रीवास्तव तथा पंडा<sup>[5,7]</sup> के शोधपत्र को देखें।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित फल [2p. 301(21, 23)] का प्रयोग करेंगे :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x) dx}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)\Gamma(d-x)} = \frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2\Gamma(a+b)/2\Gamma(c+d)/2\Gamma(c+d-1)}, \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x) dx}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)\Gamma(d-x)} = \frac{\cos[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2\Gamma(a+b)/2\Gamma(c+d)/2\Gamma(a+d-1)}, \quad (1.9)$$

जहाँ

(1.8) एवं (1.9) में

$$Re(a+b+c+d) > 2, \quad a+c=b+d,$$

2. जिन समाकलनों को बहुचर H-फलन के प्राचलों के सापेक्ष ज्ञात करना है, वे निम्नवत् हैं तथा प्रत्येक समाकलन में  $N, R, M$  एवं  $T$  का आशय (1.2) से (1.5) में प्राचलों के समुच्चयों को दर्शाता है :

प्रथम समाकलन :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x) H_{p, q+4; \langle p_i, q_i \rangle}^{o, h; \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M, \phi_1 : T \end{matrix} \right] dx \\ &= \frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2} H_{p, q+3; \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n; \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M, \phi_2 : T \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

द्वितीय समाकलन :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) H_{p, q+4; \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n; \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M, \phi_1 : T \end{matrix} \right] dx \\ &= \frac{\cos[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2} H_{p, q+3; \langle p_i, p_i \rangle}^{o, n; \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} NR : \\ M, \phi_2 : T \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

समाकलन (2.1) एवं (2.2) में  $\phi_1$  और  $\phi_2$  प्राचलों का समुच्चय जो निम्न है :

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \left[ 1-a-x : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right], \left[ 1-b+x : \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right], \left[ 1-c-x : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right], \\ & \left[ 1-d+x : \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\phi_2 = \left[ 1 - \left( \frac{a+b}{2} \right) : \sum_{j=1}^k A_j^{(r)} \right], \left[ 1 - \left( \frac{c+d}{2} \right) : \sum_{j=1}^k B_j^{(u)} \right],$$

$$\left[ 2 - a - d : \sum_{j=1}^k \left( A_j^{(u)} + B_j^{(u)} \right) \right], \quad (2.4)$$

समाकलन (2.1) और (2.2) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी हैं।

$$\sum_{j=0}^r A_j^{(u)} \geq 0, \sum_{j=0}^r B_j^{(u)} \geq 0, |\arg(z_i)| < \frac{1}{2} \Omega_i \pi, \forall i \in (1, \dots, r)$$

$$Re \left[ a + b + c + d + 2 \sum_{j=1}^k \left( A_j^{(u)} + B_j^{(u)} \right) Re \left( B_j^{(u)} / \beta_j^{(u)} \right) \right] > 2, \quad (2.5)$$

तृतीय समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x) H_{p+4, p : \langle p_i, p_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M : \phi_3, T \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\sin [\frac{1}{2}(b-a)]}{2} H_{p+3, q : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M : \phi_4, T \end{matrix} \right], \quad (2.6)$$

चतुर्थ समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) H_{p+4, q : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M : \phi_3, T \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\cos [\frac{1}{2}(b-a)]}{2} H_{p+3, q : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ M : \phi_4, T \end{matrix} \right] \quad (2.7)$$

समाकलन (2.6) और (2.7) में  $\phi_3$  एवं  $\phi_4$  प्राचलों का समुच्चय जो निम्नवत् है :

$$\phi_3 = \left( a + x : \sum_{j=1}^k A_j^{(u)} \right), \left( c + x : \sum_{j=1}^k B_j^{(u)} \right), \left( b - x : \sum_{j=1}^k A_j^{(u)} \right),$$

$$\left( d - x : \sum_{j=1}^k B_j^{(u)} \right), \quad (2.8)$$

$$\phi_4 = \left[ 1 - \frac{(a+b)}{2} : \sum_{j=1}^k A_j^{(u)} \right], \left[ 1 - \frac{(c+d)}{2} : \sum_{j=1}^k B_j^{(u)} \right],$$

$$\left[ 2 - (a+d) : \sum_{j=1}^k \left( A_j^{(u)} + B_j^{(u)} \right) \right], \quad (2.9)$$

समाकलन (2.6) एवं (2.7) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी है।

$$\sum_{u=0}^k A_j^{(u)} \geq 0, \sum_{n=0}^k B_j^{(u)} \geq 0, \quad |\arg(z_i)| < \frac{1}{2}\Omega_i\pi, \quad \forall i \in (1, \dots, r), \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Re} \left[ a+b+c+d - 2 \sum_{u=1}^k \left( A_j^{(k)} + B_j^{(k)} \right) \cdot \operatorname{Re} \left( B_j^{(k)} / \beta_j^{(k)} \right) \right] > 2, \quad (2.11)$$

पंचम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x) H_{p+2, q+2 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_6, m : \phi_8, T \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\sin \left[ \frac{1}{2}(b-a) \right]}{2} H_{p+1, q+2 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_7, m : \phi_8, T \end{matrix} \right], \quad (2.12)$$

षष्ठम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) H_{p+2, q+2 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_6, m : \phi_8, T \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\cos \left[ \frac{1}{2}(b-a) \right]}{2} H_{p+1, q+2 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_7, m : \phi_8, T \end{matrix} \right], \quad (2.13)$$

समाकलन (2.12) और (2.13) में क्रमशः  $\phi_6, \phi_8, \phi_7$  एवं  $\phi_8$  प्राचलों का समुच्चय दर्शाता है, जो निम्नवत् है :

$$\phi_6 = \left( 1 - a - x : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right), \left( 1 - b + x : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right), \quad (2.14)$$

$$\phi_8 = \left( c + x : \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right), \left( d - x : \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right), \quad (2.15)$$

$$\phi_7 = \left[ 2 - \left( \frac{a+b}{2} \right) : 2 \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right], \left[ 2 - a - d : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} - B_j^{(u)} \right], \quad (2.16)$$

$$\phi_8 = \left[ 2 - c - d : 2 \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right], \quad (2.17)$$

समाकलन (2.12) एवं (2.13) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी हैं।

$$\sum_{u=0}^k A_j^{(u)} > \sum_{u=0}^k B_j^{(u)} \geq 0, \quad |\arg(z_i)| < \frac{1}{2} \Omega_i \pi, \quad \forall i \in (1, \dots, r), \quad (2.18)$$

$$\operatorname{Re} \left[ a + b + c + d + 2 \sum_{u=1}^k \left( A_j^{(u)} \left\langle \operatorname{Re} \left( A_j^{(k)} / \alpha_j^{(k)} \right) \right\rangle - 2 \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \left\langle \operatorname{Re} \left( B_j^{(k)} / \beta_j^{(k)} \right) \right\rangle \right] > 2, \quad (2.19)$$

सप्तम समाकलन :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x) H_{p+2, q+2 : \langle m_i, n_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_9, m : \phi_{10} T \end{matrix} \right] dx \\ &= \frac{\sin \left[ \frac{1}{2}(b-a) \right]}{2} H_{p+2, q+1 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_{11}, m : \phi_{12}, T \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

अष्टम समाकलन :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) H_{x+2, q+2 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_9, m : \phi_{10} T \end{matrix} \right] dx \\ &= \frac{\cos \left[ \frac{1}{2}(b-a) \right]}{2} H_{p+2, q+1 : \langle p_i, q_i \rangle}^{o, n : \langle m_i, n_i \rangle} \left[ \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \phi_{11}, m : \phi_{12}, T \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

समाकलन (2.20) और (2.21) में  $\phi_9, \phi_{10}, \phi_{11}$  एवं  $\phi_{12}$  प्राचलों का समुच्चय दर्शाता है, जो निम्नवत् है :

$$\phi_9 = \left( a - x : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right), \left( b + x : \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right), \quad (2.22)$$

$$\phi_{10} = \left( 1 - c - x : \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right), \left( 1 - d + x : \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right), \quad (2.23)$$



$$\phi_{11} = \left( 2 - c - d : 2 \sum_{u=1}^k B_j^{(u)} \right), \quad (2.24)$$

$$\phi_{12} = \left[ 2 - (a+b) : 2 \sum_{u=1}^k A_j^{(u)} \right], \left[ 2 - \left( a+d : \sum_{u=1}^r B_j^{(u)} - A_j^{(u)} \right) \right], \quad (2.25)$$

समाकलन (2.20) एवं (2.21) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी हैं :

$$\sum_{u=0}^k B_j^{(u)} > \sum_{u=0}^k A_j^{(u)} \geq 0, \quad |\arg(z_i)| < \frac{1}{2} \Omega_i \pi, \quad \forall i \in (1, \dots, r), \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ a + b + c + d + 2 \sum_{u=1}^k \left( B_j^{(u)} \right) < \operatorname{Re} \left( B_j^{(u)} / \beta_j^{(u)} \right) \right. \\ \left. - 2 \sum_{u=1}^k \left( A_j^{(u)} \right) < \operatorname{Re} \left( A_j^{(k)} / \alpha_j^{(k)} \right) \right] > 2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

उपपत्ति

(2.1) की स्थापना के लिये इसके वाम पक्ष के समाकलन में आये बहुचर H-फलन को (1.1) के बल पर मेलिन-वार्निज प्रकार के बहु-कट्टर समाकलनों के रूप में व्यक्त करते हैं, जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध और पूर्णतया अभिसारी है, जिससे हमें निम्न समाकलन की प्राप्ति होती है :

$$\begin{aligned} &= 1/(2\pi\omega)^r \int_{L_1} \int_{L_2} \dots \int_r \phi(s_1, \dots, s_r) \prod_{j=1}^r \langle \theta_i(s_i)(z_i)^{s_i} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x) dx}{\Gamma\left(a + \sum_{u=1}^r A_j^{(u)} s_i + x\right) \Gamma\left(b + \sum_{u=1}^r A_j^{(u)} s_1 - x\right) \Gamma\left(c + \sum_{u=1}^r B_j^{(u)} s_1 + x\right)} \\ &\Gamma\left(d + \sum_{u=1}^r B_j^{(u)} s_1 - x\right) \end{aligned}$$

अब (1.8) की सहायता से आंतरिक अनन्त समाकलन का मान प्राप्त परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (2.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है। इसी प्रकार परिणाम (2.6), (2.12) एवं (2.20) प्राप्त किये जा सकते हैं।

## टिप्पणी

परिणाम (2.2), (2.7), (2.13) एवं (2.21) प्राप्त करने के लिये (1.8) के स्थान पर (1.9) का प्रयोग करके (2.1) के लिये की गई उपपत्ति की तरह प्राप्त कर (पुनः दोहरा कर) सकते हैं।

## 3. विशिष्ट दशाएँ :

इस अनुभाग में कतिपय प्राप्त किये गये परिणामों को ज्ञात किया गया है। -

- (अ) यदि समाकलन प्रथम, तृतीय, पंचम एवं सप्तम में  $r=1$  रखें तो हमें आनन्दानी, रोंघे के परिणाम प्राप्त होंगे। (1 देखें p. 13-16)
- (ब) यदि समाकलन द्वितीय, चतुर्थ, षष्ठम एवं अष्ठम में  $r=2$  रखें तो लेखक के पुराने परिणामों की प्राप्ति होती है। (6 देखें p. 45-51)

## कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देशन के लिये लेखक डॉ० आर० डी० अग्रवाल, गणित विभाग, इंजीनियरिंग कॉलेज, विदिशा का आभारी है।

## निर्देश

1. आनन्दानी, पी० तथा रोंघे ए०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका 1987, 30, 13-16.
2. एडेल्टी, ए०, इत्यादि : Table of Integral Transforms, भाग 2, मेकग्राहिल न्यूयार्क 1954.
3. गोयल, एस० पी० : Pure and applied Mathematica Sci. 1978, 8, 19-28.
4. गर्ग, आर० एस० : Pure and applied Mathematica Sci. 1979, 10, 31-36.
5. सक्सेना, आर० के०, : Kygug. Math. J. 1977, 17, 221-226.
6. रोंघे, ए०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका 1989, 32, 45-51.
7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H-function of One and Two Variables, with Applications. साउथ-एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली तथा मद्रास, 1982

## 2-दूरीक समष्टि पर एक सामान्य स्थिर बिन्दु प्रमेय

एन० एस० सिमोनिया

74 महाजनी बाई, नरसिंहपुर (म०प्र०)

[ प्राप्त—मार्च 15, 1990 ]

### सारांश

2-दूरीक समष्टि पर उपगमित: क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों के लिये एक स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध किया गया है।

### Abstract

**Common fixed point theorem on 2-metric space.** By N. S. Simoniya, 74, Mahajani ward, Narsinghpur (M.P.).

A fixed point theorem for asymptotically commuting mappings on a 2-metric space have been proved.

प्रस्तुत प्रपत्र में 2-दूरीक समष्टि  $(X, d)$  पर  $A, S, T$  प्रतिचित्रणों के लिये एक प्रमेय सिद्ध किया गया है जिसमें  $\{A, S\}$  तथा  $\{A, T\}$  एक सर्वसम स्थिर बिन्दु के लिये उपगमित: क्रमविनिमयी (asymptotically commuting) हैं।

परिभाषा<sup>[2]</sup>: 2-दूरीक समष्टि में आत्मप्रतिचित्रण  $A$  तथा  $T$  उपगमित: क्रमविनिमयी या  $z$ -उपगमित: क्रमविनिमयी कहलाते हैं यदि और केवल यदि

$$\lim d(ATx_n, TAx_n) = 0,$$

जहाँ  $\{x_n\}$   $X$  में ऐसा अनुक्रम है कि  $x$  के एक बिन्दु  $z$  के लिये

$$\lim Ax_n = \lim Tx_n = z.$$

परिभाषा[3] : माना कि  $A$  तथा  $T$  एक 2-समष्टि दूरीक  $(x, d)$  पर आत्म-प्रतिचित्रण हैं।  $A$  तथा  $T$  को उपगमितः अभिगमन या  $z$ -उपगमितः क्रमविनिमयी कहा जाता है यदि और केवल यदि  $x$  के प्रत्येक  $a$  के लिये

$$\lim d(ATx_n, TAx_n, a) = 0,$$

जहाँ  $\{x_n\}$   $x$  में ऐसा अनुक्रम है कि

$$\lim Ax_n = \lim Tx_n = z.$$

इस प्रपत्र के प्रमेय में (देखें प्रतिबन्ध (iii))  $\{Ax_n\}$  को पहले पहल फिशर द्वारा<sup>[4]</sup> परिभाषित किया गया। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि  $(x) \subset S(x) \cap T(x)$ , तो  $x$  के प्रत्येक  $x_0$  के लिये अनुक्रम  $\{x_n\}$  एवं  $\{Ax_n\}$  निश्चय ही विद्यमान हैं।

हम सिंह तथा कुमार<sup>[4]</sup> के परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करके सुधारेंगे।

प्रमेय :

माना कि  $(x, d)$   $d$ -संतत तथा  $x$  पर आत्म प्रतिचित्रणों  $A, S, T$  से युक्त एक 2-दूरीक समष्टि है। यदि  $\alpha$  तथा  $\beta$  ऐसी असली संख्याएँ हों कि  $0 < \alpha + \beta < 1$  तथा

$$(i) \quad d(Ax, Ay, a) \leq [\alpha d(Sx, Sy, a) d(Ax, Ay, a) + \beta d(Tx, Ty, a) d(Sy, Ay, a)]^{1/2}.$$

(ii)  $x$  में बिन्दु  $x_0$  के लिये एक अनुक्रम  $\{x_n\}$  पाया जाता है जो

$$\begin{aligned} Sx_{2n+1} &= Ax_{2n}, & Tx_{2n+2} &= Ax_{2n+1}, \\ Ax_{n+1} &\neq Ax_{n+2}, & n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

की तुष्टि करता है।

(iii) अनुक्रम  $\{Ax_n\}$  का एक उपअनुक्रम होता है जो  $x$  में बिन्दु  $z$  तक अभिसरण करता है।

(iv)  $A, S, T$  संतत हैं  $z$  पर।

(v)  $\{A, S\}$  एवं  $\{A, T\}$   $z$ -उपगमितः क्रमविनिमयी युग्म हैं।

तब  $z$  संपात-बिन्दु है  $A, S$  तथा  $T$  का। यदि  $0 < \alpha < 1$  तो  $z$  सर्वसम स्थिर बिन्दु है  $A, S$  एवं  $T$  का जो अद्वितीय भी है।

उपपत्ति :

(i) में  $x=x_{2n}$  एवं  $y=x_{2n+1}$  रखने पर

$$\begin{aligned} d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) &\leq [\alpha d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \\ &\quad d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) \\ &\quad + \beta d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \\ &\quad d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)]^{1/2}, \end{aligned}$$

अर्थात्

$$\begin{aligned} d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) &\leq [(\alpha + \beta) d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \\ &\quad d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)]^{1/2} \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\begin{aligned} [d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)]^2 &\leq (\alpha + \beta) d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \\ &\quad d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) \end{aligned}$$

अर्थात्

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) \leq (\alpha + \beta) d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a),$$

इसी तरह से (i) में  $x=x_{2n+1}$  तथा  $y=2n+2$  होने से

$$d(Ax_{2n+2}, Ax_{2n+1}, a) \leq (\alpha + \beta) d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a).$$

इसलिये  $x$  के समस्त  $n=1, 2, 3, \dots$ , के लिये

$$d(Ax_{n+1}, Ax_{n+2}, a) \leq h d(Ax_n, Ax_{n+1}, a),$$

जहाँ

$$(\alpha + \beta) = h, h \in [0, 1].$$

प्रमेय 1 से (सिंह<sup>[5]</sup>)  $\{Ax_n\}$  एक कौशी अनुक्रम होता है। अतः प्रतिबन्ध (iii) से  $Ax_n \rightarrow z$ ,  $Sx_{2n+1} \rightarrow z$  एवं  $Tx_{2n+2} \rightarrow z$ . अतः (iv) से  $ATx_{n_i} \rightarrow Az$  एवं  $TAx_{n_i} \rightarrow Tz$ , जहाँ  $\{n_i\}$  उप अनुक्रम है अनुक्रम  $\{n\}$  का।

चूँकि  $A$  तथा  $T$   $z$ -उपगमितः क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं इसलिये  $x$  के प्रत्येक  $a$  के लिये

$$\lim d(ATx_{n_i}, TAx_{n_i}, a) = 0,$$

चूँकि  $d$  संतत है इसलिये प्रत्येक  $a \in x$  के लिये

$$d(Ax, Tz, a) = 0.$$

इसका अर्थ यह हुआ कि

$$Az = Tz \text{ तथा इसी तरह } Az = Sz.$$

अतः  $z$  संपात बिन्दु है  $A, S$  तथा  $T$  का। अब (i) में  $x = x_{2n}$  तथा  $y = z$  रखने और सीमा मान लेने पर

$$d(z, Az, a) \leq ad(z, Az, a) < d(z, Az, a).$$

जिसका अर्थ हुआ कि  $Az = z$ । इसी प्रकार  $Sz = z$  तथा  $Tz = z$ । अतः  $z$  सर्वसम स्थिर बिन्दु है  $A, S$  तथा  $T$  का और यह आसानी से देखा जा सकता है कि  $z$  अद्वितीय स्थिर बिन्दु है  $A, S$  तथा  $T$  का। अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

#### निर्देश

1. फिगर, बी०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, 7, 81-84.
2. सिंह, एस० एल० तथा तिवारी, बी० एम० एल०, J. UPGC., Acad. Soc., 1986, 3, 13-18.
3. सिंह, एस० एल० तथा कुमार, बी०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1987, 30, 207-212.
4. वही : वही, 1987, 30, 207-212
5. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, 7, 1-11.

## दो चरों वाले H-फलन से युक्त एक द्विगुण समाकल

वी० सी० नायर तथा एम० आर० प्रसन्नाकुमारी

संग्रह्युक्त विज्ञान तथा मानविकी विभाग  
रीजनल इंजीनियरी कॉलेज, कालीकट (केरल)

[प्राप्त—जनवरी 17, 1990]

### सारांश

दो चरों वाले H-फलन से युक्त एक द्विगुण समाकल का मान ज्ञात किया गया है। राठी द्वारा सिद्ध किये गये एक समाकल को विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किया गया है।

### Abstract

A double integral involving H-function of two variables. By V. C. Nair and M.R. Prasanna Kumari, Department of Applied Sciences and Humanities, Regional Engineering College, Calicut (Kerala).

A double integral involving an H-function of two variables is evaluated. An integral proved by Rathie (8, p. 12) is obtained as a special case. Many other interesting special cases are also obtained.

### 1. प्रयुक्त परिभाषाएँ तथा फल

प्रसाद तथा प्रसाद<sup>[1]</sup> ने दो चरों को H-फलन को निम्नवत् परिभाषित किया है—

$$H[x, y] = H_{P, Q : (p, q) : (u, v)}^{M, N : (m, n) : (g, h)} \left[ ((a_p; \alpha_p, A_p)) : ((c_p, C_p)) : ((e_u, E_u)) : ((b_q; \beta_q, B_q)) : ((d_q, D_q)) : ((f_v, F_v)) \right] ; x, y$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi_1(s) \phi_2(t) \psi(s, t) x^s y^t ds dt,$$

जहाँ

$$i = \sqrt{-1}$$

(1.1)

$$\phi_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(d_j - D_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - c_j + C_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - d_j + D_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(c_j - C_j s)}, \quad (1.2)$$

$$\phi_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^g \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{j=1}^h \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=g+1}^v \Gamma(1 - f_j - F_j t) \prod_{j=h+1}^u \Gamma(e_j - E_j t)}, \quad (1.3)$$

तथा

$$\psi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^M \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t) \prod_{j=1}^N \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)}{\prod_{j=M+1}^Q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t) \prod_{j=N+1}^P \Gamma(a_j - \alpha_j s - A_j t)}, \quad (1.4)$$

जहाँ  $x, y \neq 0$ , रिक्त गुणनफल को इकाई माना जाता है  $M, N, P, Q, m, n, p, q, g, h, u, v$ , सभी पूर्ण संख्याएँ हैं जिससे कि  $0 \leq M \leq Q, 0 \leq N \leq P, Q \geq 0, 0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p, 0 \leq g \leq v, 0 \leq h \leq u$  तथा  $\alpha_j, \beta_j, A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j$  सभी घनात्मक हैं।

प्राचलों  $(a_p), (b_q), (c_p), (d_q), (e_u)$  का अनुक्रम तथा  $(f_v)$  इतने प्रतिबन्धित हैं कि समाकल्य का कोई भी पोल नहीं मिलता।

कंटूर  $L_1$  संमिश्र  $s$ -तल में स्थित है और अपने लूपों सहित  $-i\infty$  से  $+i\infty$  तक विस्तीर्ण होता है (यदि आवश्यकता पड़ी तो) जिससे आश्वस्त हुआ जा सके कि  $\Gamma(d_j - D_j s), j=1, \dots, m$  एवं  $\Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t), j=1, \dots, M$  के पोल पथ के दाईं ओर अवस्थित हैं और  $\Gamma(1 - c_j + C_j s), j=1, \dots, n$  एवं  $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t), j=1, \dots, N$  के पोल पथ के बाईं ओर।

यही नहीं, कंटूर  $L_2$  संमिश्र  $t$ -तल में स्थित है और अपने लूपों सहित  $-i\infty$  से  $+i\infty$  तक विस्तीर्ण है जिससे आश्वस्त हुआ जा सके कि  $\Gamma(f_j - F_j t), j=1, \dots, g$  तथा  $\Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t), j=1, \dots, M$  पथ के दाहिनी ओर स्थित हैं तथा  $\Gamma(1 - e_j + E_j t), j=1, \dots, h$  एवं  $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t), j=1, \dots, N$  के पोल पथ के बायीं ओर। समाकल्य के सारे पोल सरल पोल हैं।

संक्षेपणों  $(a_p), ((a_p, A_p))$  एवं  $((a_p, \alpha_p, A_p))$  द्वारा  $p$ -प्राचलों के अनुक्रमों का चयन इस प्रकार होता है



$$(a_p) = a_1, a_2, \dots, a_p$$

$$((a_p, A_p)) = (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p)$$

तथा

$$((a_p; \alpha_p, A_p)) = (a_1; \alpha_1, A_1), (a_2; \alpha_2, A_2), \dots, (a_p; \alpha_p, A_p)$$

बुशमैन<sup>[2]</sup> ने दो चरों वाले H-फलन के अभिसरण प्रतिबन्धों का एक सेट प्रदान किया है।

(1.1) द्वारा परिभाषित फलन  $H[x, y]$   $x$  तथा  $y$  का एक विश्लेषिक फलन है यदि

$$V_1 < 0, V_2 < 0$$

जहाँ

$$V_1 = \sum_{j=1}^P (\alpha_j) + \sum_{j=1}^b (C_j) - \sum_{j=1}^Q (\beta_j) - \sum_{j=1}^q (D_j) \quad (1.5)$$

तथा

$$V_2 = \sum_{j=1}^P (A_j) + \sum_{j=1}^u (E_j) - \sum_{j=1}^Q (B_j) - \sum_{j=1}^v (F_j) \quad (1.6)$$

(1.1) के दायें पक्ष का द्विगुण समाकल अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x| < \frac{1}{2} \Delta_1 \pi$$

तथा

$$|\arg y| < \frac{1}{2} \Delta_2 \pi$$

जहाँ

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \sum_{j=1}^N (\alpha_j) - \sum_{j=N+1}^P (\alpha_j) + \sum_{j=1}^M (\beta_j) - \sum_{j=M+1}^Q (\beta_j) + \sum_{j=1}^m (D_j) - \sum_{j=m+1}^q (D_j) \\ & + \sum_{j=1}^n (C_j) - \sum_{j=n+1}^b (C_j) > 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

तथा

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \sum_{j=1}^N (A_j) - \sum_{j=N+1}^P (A_j) + \sum_{j=1}^M (B_j) - \sum_{j=M+1}^Q (B_j) + \sum_{j=1}^g (F_j) - \sum_{j=g+1}^v (F_j) \\ & + \sum_{j=1}^h (E_j) - \sum_{j=h+1}^u (E_j) > 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

निम्नलिखित परिणामों को<sup>[1,3,4,5,6]</sup> प्रयुक्त किया जावेगा

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin \theta)^{\alpha-1} (\cos \theta)^{\beta-1} d\theta = e^{i\pi\alpha/2} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0. \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\infty} x^{r-1/2} [(x+a)(x+b)]^{-r} dx = \sqrt{\pi} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{1-2r} \frac{\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma(r)}, R(r) > \frac{1}{2} \quad (1.10)$$

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma(z+\frac{1}{2}) \quad (1.11)$$

$$x^\mu J_\nu(x) = 2^\mu G_{0,2}^{1,0} \left[ \frac{1}{4} x^2 / \frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu-\nu}{2} \right] \quad (1.12)$$

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} x \cdot G_{p,q+1}^{1,p} \left[ x / \begin{matrix} -a_1, \dots, -a_p \\ -1, -b_1, \dots, -b_q \end{matrix} \right],$$

$$p \leq q+1. \quad (1.13)$$

$$H_{o,m:(1,n),(1,n)}^{o,m:(1,n),(1,n)} \left[ \begin{matrix} -x / ((1-a_m; 1, 1)) : ((1-c_n, 1)) \\ -y / ((1-b_p; 1, 1)) : (0, 1), ((1-d_q, 1)) : \\ ((1-e_n, 1)) \\ (0, 1), ((1-f_q, 1)) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(a_j) \prod_{j=1}^n \{\Gamma(c_j) \Gamma(e_j)\}}{\prod_{j=1}^p \Gamma(b_j) \prod_{j=1}^q \{\Gamma(d_j) \Gamma(f_j)\}} F_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right]$$

जहाँ

$$F_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] \text{ काम्पे द फेरी फलन है जिसकी परिभाषा}$$

$$F_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^n \{\Gamma(c_j)_r \Gamma(e_j)_s\}}{\prod_{j=1}^p \Gamma(b_j)_{r+s} \prod_{j=1}^q \{\Gamma(d_j)_r \Gamma(f_j)_s\}} \times \frac{x^r y^s}{r! s!}$$

के रूप में की जाती है। साथ ही

$$m+n < p+q+1$$

अथवा

$$m+n=p+q+1$$

तथा

$$|x|+|y|<\min(1, 2^{p-m+1}). \quad (1.14)$$

## 2. मुख्य परिणाम

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{r} \sin \theta \cos \theta} H_{P, Q : (p, q), (u, v)}^{M, N : (m, n), (g, h) \left[ \begin{matrix} ((a_p; \alpha_p, A_p)) : ((c_p, C_p)) : \\ ((b_q; \beta_q, B_q)) : ((d_q, D_q)) : \end{matrix} \right.}$$

$$\left. \begin{matrix} ((e_u, E_u)) \\ ((f_v, F_v)) \end{matrix} : Z \phi(r, \theta, \delta_1, \mu_1, \lambda_1), U \phi(r, \theta, \delta_2, \mu_2, \lambda_2) \right] dr d\theta$$

$$\sqrt{\pi} e^{i\pi\alpha/2} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) H_{P+3, Q+2 : (p, q) : (n, v)}^{M, N+3 : (m, n) : (g, h) \left[ \begin{matrix} (3/2 - \gamma; \lambda_1, \lambda_2), (1 - \alpha; \mu_1, \mu_2), \\ ((b_q; \beta_q, B_q)), (1 - \gamma; \lambda_1, \lambda_2), \end{matrix} \right.}$$

$$\left. \begin{matrix} (1 - \beta; \delta_1, \delta_2), ((a_p; \alpha_p, A_p)) : ((c_p, C_p)) : ((e_u, E_u)) \\ (1 - \alpha - \beta; \mu_1 + \delta_1, \mu_2 + \delta_2) : ((d_q, D_q)) : ((f_v, F_v)) \end{matrix} : ze^{i\pi\mu_1/2}, ue^{i\pi\mu_1/2} \right] , \quad (2.1)$$

जहाँ

$$\phi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma) = e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin \theta)^\alpha (\cos \theta)^\beta \left[ \frac{r(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(r+a)(r+b)} \right]^\gamma, \quad (2.2)$$

बशर्ते

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$$

जहाँ  $\Delta_1$  तथा  $\Delta_2$  को (1.7) तथा (1.8) द्वारा विशेष रूप से परिभाषित किया जाता है

$$|\arg z + (\delta_1 + \mu_1)\pi/2| < \frac{1}{2}\Delta_1\pi,$$

$$|\arg u + (\delta_2 + \mu_2)\pi/2| < \frac{1}{2}\Delta_2\pi,$$

$$R[\alpha + \mu_1(b_j/\beta_j) + \mu_2(b_j/B_j)] > 0 \quad j=1, \dots, M, \text{ के लिए}$$

$$R[\beta + \delta_1(b_j/\beta_j) + \delta_2(b_j/B_j)] > 0 \quad j=1, \dots, M, \quad ,,$$

$$R[\gamma + \lambda_1(b_j/\beta_j) + \lambda_2(b_j/B_j)] > \frac{1}{2} \quad j=1, \dots, M, \quad ,,$$

$$R[\alpha + \mu_1(d_j/\delta_j)] > 0 \quad j=1, \dots, m, \quad ,,$$

$$R[\beta + \delta_1(d_j/\delta_j)] > 0 \quad j=1, \dots, m, \quad ,,$$

$$R[\gamma + \lambda_1(d_j/\delta_j)] > \frac{1}{2} \quad j=1, \dots, m, \quad ,,$$

$$R[a + \mu_1(f_j/F_j)] > 0 \quad j=1, \dots, g, \quad ,,$$

$$R[\beta + \delta_1(f_j/F_j)] > 0 \quad j=1, \dots, g, \quad ,,$$

$$R[\gamma + \lambda_1(f_j/F_j)] > \frac{1}{2} \quad j=1, \dots, g. \quad ,,$$

उपपत्ति :

(2.1) के बायीं ओर के दो चरों वाले  $H$ -फलन को एक कंदूर समाकल के रूप में व्यक्त करने पर (2.1) का बायां पक्ष निम्नवत् होगा

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{r} \sin \theta \cos \theta} \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi_1(s) \phi_2(t) \psi(s, t) z^s [\phi(r, \theta, \delta_1, \mu_1, \lambda_1)]^s \right. \\ \left. u^t [\phi(r, \theta, \delta_2, \mu_2, \lambda_2)]^t ds dt \right\} dr d\theta$$

जहाँ  $\phi_1(s)$ ,  $\phi_2(t)$  तथा  $\psi(s, t)$  को क्रमशः (1.2), (1.3) एवं (1.4) द्वारा परिभाषित किया जाता है। समाकलनों के क्रम को बदलने तथा परिणाम (1.9) एवं (1.10) का उपयोग करने पर यह निम्न में समानीत हो जाता है

$$\sqrt{\pi}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) e^{i\pi\alpha/2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi_1(s) \phi_2(t) \psi(s, t) (ze^{i\pi\mu_1/2})^s (ue^{i\pi\mu_2/2})^t \\ \frac{\Gamma(\alpha + \mu_1 s + \mu_2 t) \Gamma(\beta + \delta_1 s + \delta_2 t) \Gamma(\gamma + \lambda_1 s + \lambda_2 t - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \beta + (\mu_1 + \delta_1)s + (\mu_2 + \delta_2)t) \Gamma(\gamma + \lambda_1 s + \lambda_2 t)} ds dt \quad (2.3)$$

तब (1.1) का उपयोग करने पर (2.1) का दायीं पक्ष प्राप्त किया जाता है।

जब दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं, जो निहित समाकलों की परम अभिसारिता के कारण हैं तो समाकलन के क्रम का परिवर्तन वैध होता है।

### 3. विशिष्ट दशाएँ :

जब

$$M=0, N=0, P=0, Q=0, \mu_2=0, \lambda_2=0, \delta_2=0$$

तो हमें

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{r} \sin \theta \cos \theta} H_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} ((c_p, C_p)) \\ ((d_q, D_q)) \end{matrix} : z\phi(r, \theta, \delta_1, \mu_1, \lambda_1) \right] dr d\theta$$

$$= \sqrt{\pi} e^{i\pi\alpha/2} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) H_{p+3, q+2}^{m, n+3} \left[ \begin{matrix} (3/2 - \gamma, \lambda_1), (1 - \alpha, \mu_1), (1 - \beta, \delta_1), ((c_p, C_p)) \\ ((d_q, D_q), (1 - \gamma, \lambda_1), (1 - \alpha - \beta, \delta_1 + \mu_1)) \end{matrix} : z \right] \quad (3.1)$$

मिलता है जहाँ  $\phi$  को (2.2) द्वारा परिभाषित किया जाता है बशर्ते

$$\lambda_1 > 0, \delta_1 > 0, \mu_1 > 0, R(\alpha) > 0, R[\beta + d_1(b_j/f_j)] > 0, R[\gamma + \lambda_1(b_j/f_j)] > \frac{1}{2},$$

$$j=1, \dots, m, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n c_j - \sum_{j=n+1}^p C_j + \sum_{j=1}^m d_j - \sum_{j=m+1}^q D_j > 0, \quad |\arg z| < \Delta\pi/2.$$

राठी ने सिद्ध किया कि  $\mu_1 = 0$  जब  $\mu_1 = 0$

निम्नलिखित दो समाकलों को क्रमशः (1.9) तथा (1.10) का प्रयोग करते हुये स्वतन्त्र रूप से सिद्ध किया जा सकता है इनके गुणनफल को (2.1) की विशेष दशा के रूप में निकाला जा सकता है।

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin \theta)^{\alpha-1} (\cos \theta)^{\beta-1} J_\nu(xe^{i\theta/2} \sqrt{\cos \theta}) d\theta \\ &= \Gamma(\alpha) e^{i\pi/2} \frac{(x/2)^\nu \Gamma(\nu/2 + \beta)}{\Gamma(1+\nu) \Gamma(\nu/2 + \alpha + \beta)} {}_1F_2 \left( \begin{matrix} \beta + \nu/2 \\ 1 + \nu, \alpha + \beta + \nu/2 \end{matrix} ; -x^2/4 \right), \\ & \quad R(\beta + \nu/2) > 0, R(\alpha) > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{r^{\gamma-1/2}}{[(r+a)(r+b)]^\gamma} J_\mu \left[ \frac{y\sqrt{r}}{\sqrt{(r+a)(r+b)}} \right] dr \\ &= \sqrt{\pi} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{1-2\gamma} \left[ \frac{y/2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right]^\mu \frac{\Gamma(\mu/2 - \frac{1}{2} + \gamma)}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(\mu/2 + \gamma)} \\ & \quad {}_1F_2 \left( \begin{matrix} \mu/2 + \gamma - \frac{1}{2} \\ 1 + \mu, \mu/2 + \gamma \end{matrix} ; \frac{-y^2/4}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right), \quad R(\gamma + \mu/2 - \frac{1}{2}) > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(2.1) में

$$M=0, N=P, m=g=1, n=h=u=p, \lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=\delta_1=\delta_2=1,$$

रखें तो प्रत्येक

$$\alpha_p = A_p = B_q = \beta_q = C_p = D_q = E_u = F_v = 1,$$

$q$  तथा  $\nu$  के स्थान पर  $q+1$ ,  $\alpha_p$  के स्थान पर  $1-\alpha_p$ ,  $b_q$  के स्थान पर  $1-b_q$ ,  $c_p$  के स्थान पर  $1-c_p$ ,  $d_q$  के स्थान पर  $1-d_q$ ,  $e_p$  के स्थान पर  $1-e_p$ , तथा  $f_q$  के स्थान पर  $1-f_q$  रखने एवं (1.11) एवं (1.14) का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{r} \sin \theta \cos \theta} \\
 & F_{Q, q}^{P, p} \left[ \begin{matrix} a_1, \dots, a_p; c_1, e_1, \dots, c_p, e_p : -z\phi(r, \theta, 1, 1, 1) \\ b_1, \dots, b_q; d_1, f_1, \dots, d_q, f_q : -u\phi(r, \theta, 1, 1, 1) \end{matrix} \right] dr d\theta \\
 & 2^{\alpha+\beta-1} e^{i\pi\alpha/2} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \frac{\Gamma(\gamma - \frac{1}{2}) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta/2) \Gamma(\alpha + \beta + 1)/2} \\
 & F_{Q+3, q}^{P+3; p} \left[ \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \gamma - \frac{1}{2}, \quad \alpha, \beta \quad : c_1, e_1, \dots, c_p, e_p : -4ze^{i\pi/2} \\ b_1, \dots, b_q, \gamma, \alpha + \beta/2, \alpha + \beta + 1/2 : d_1, f_1, \dots, d_q, f_q : -4ue^{i\pi/2} \end{matrix} \right] \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

जहाँ  $\phi$  की परिभाषा

$$R[\alpha] > 0, R[\beta] > 0, R[\gamma - \frac{1}{2}] > 0$$

के रूप में दी जाती है तथा  $z$  एवं  $\mu$  असली हैं।

### कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय कालीकट के प्रक्षेत्रीय कालेज के प्रिंसिपल को धन्यवाद देना चाहेंगे कि आवश्यक सुविधाओं का हम भोग कर सके।

### निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा काम्पे द फेरी जे०, Functions of Hypergeometriques et Hyper-spheriques, Polynomes, d' Hermites. Gauthier, Villars, 1926
2. बुशमान, आर० जी०, Indian J. Math. 1978, 20 (P. L. hatnagar- Volume) H function of n-variables, Dept. of Math. University of Wyoming.
3. एर्डेली, ए०, Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल बुक कम्पनी, 1954
4. वही, Higher Transcendental functions. मैकग्राहिल 1955
5. ग्रीडेस्टाइन, आई० एम० तथा रैजिक आई० एम०, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1965
6. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math Annalen, 1960-61, 142, 450-452.
7. प्रसाद, वाई० एम० तथा प्रसाद, एस०, Jour of Scientific Research, Banaras Hindu University 1979, 30(1), 67-76.
8. राठी, ए० के०, विज्ञानपरिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1979, 22., 12

## गैसीय बॉयलर का संरक्षण : इसका रासायनिक उपचार

मीणा भर्तिया तथा यू० एस० चतुर्वेदी

रसायन विभाग, एम० एस० जे० स्वायत्तशासी कालेज, भरतपुर (राज०)

[ प्राप्त—दिसम्बर 20, 1990 ]

### सारांश

आक्सीजन, कार्बनडाइ आक्साइड, सल्फरडाइआक्साइड जैसी विलयित गैसों जल में कठोरता उत्पन्न करती हैं जिससे बॉयलर का संक्षरण होता है। कठोरता दूर करने तथा संक्षरण रोकने के लिए अनेक यौगिक उपयोगी पाये गये हैं किन्तु इनमें से हाइड्रैजीन सबसे अधिक सफल है।

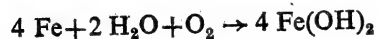
### Abstract

**Gaseous boiler corrosion: its chemical treatment.** By Meena Bhartiya and U. S. Chaturvedi, Department of Chemistry, M.S.J. Autonomous College, Bharatpur (Raj.).

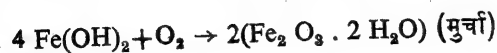
Dissolved gases like oxygen, carbon dioxide, sulphur dioxide create hardness in water, resulting in boiler corrosion. A number of compounds have been found useful for removing the hardness and preventing corrosion, but hydrazine has been found to be most successful.

सामान्यतया यह माना जाता है कि धातुओं के सल्फेट, क्लोराइड तथा कार्बोनेट जल में कठोरता उत्पन्न करने वाले हैं। किन्तु अनेक विलयित गैसों—यथा  $O_2$ ,  $CO_2$  तथा  $SO_2$  भी पर्याप्त संक्षरण उत्पन्न करती हैं। उदाहरणार्थ,  $300^\circ C$  ताप पर एक लीटर बॉयलर जल में 8 मिली० विलयित आक्सीजन रहती है। जलीय पर्यावरण में आक्सीजन लोह से अभिक्रिया करके मुर्चा बनाती है। बॉयलर की सतह पर मन्द गति से जमा हुआ मुर्चा से उसका संक्षरण हो जाता है।

$30^\circ C$  पर

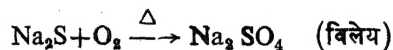


$100^\circ C$  से ऊपर



यदि कठोर जल का पूर्व उपचार किया जाय तो विलयित आक्सीजन की मात्रा कम की जा सकती है। लेकिन रासायनिक उपचार सर्वश्रेष्ठ इलाज है।

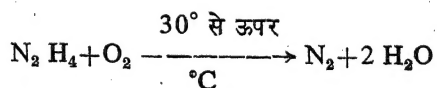
परम्परा के अनुसार सोडियम सल्फेट तथा सोडियम सल्फाइट को विलयित आक्सीजन के उदासीनीकरण के लिए प्रयुक्त हुआ है



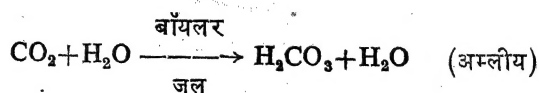
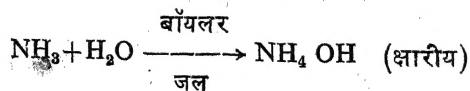
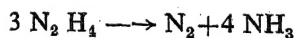
बाद में यह ज्ञात हुआ कि हाइड्रोजन विलयित आक्सीजन, कार्बन डाइ आक्साइड तथा प्राइमिंग को दूर करने के लिए आदर्श अभिकर्मक है। इसके मुख्य लाभ निम्नवत् है :

1. यह संवेदनशील अभिकर्मक है।
2. यह सरलता से जल में विलेय है।
3. इसका जलीय विलयन क्षारीय होता है जो उच्चतर ताप पर अमोनिया मुक्त करता है और इस तरह जल में विलयित कार्बन डाइ आक्साइड को नियन्त्रित रखता है।
4. यह आक्सीजन को विस्थापित करता है तथा  $\text{CO}_2$  एवं  $\text{SO}_2$  को शोषित करता है। इस तरह उनकी मात्रा को कम करता है।
5. आक्सीजन इसकी अभिक्रिया से नाइट्रोजन निकलती है और जल बनता है। इस तरह विलयित ठोसों की सान्द्रता को बढ़ाये बिना ही हाइड्रोजन आक्सीजन को दूर करता है।
6. यह गंधक, सेलीनियम, आर्सेनिक, फास्फोरस आदि को विलयित कर सकता है।
7. अक्रिय रासायनिक पर्यावरण प्रदान करता है।

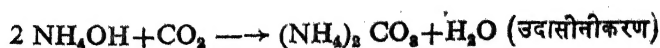
जल में घटित होने वाली कुल अभिक्रियाओं को निम्नवत् दर्शाया जा सकता है—



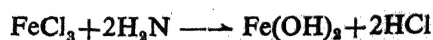
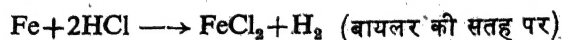
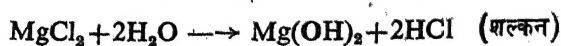
100°C से अधिक ताप पर



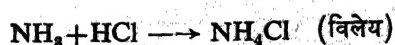
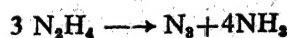




सामान्यतया उच्च ताप पर कठोर जल के मैग्नीशियम लवण बाँयलर जल के साथ अभिक्रिया करते हैं जिससे शल्क-निर्माण होता है और हाइड्रोक्लोरिक अम्ल मुक्त होता है।



इस तरह अम्ल का बारम्बार आक्रमण होता रहता है। अम्ल का निर्माण हाइड्रोजन डालने से रुक जाता है



बाँयलरों के शल्कन को रोकने की अनेक विधियाँ हैं—यथा गैल्वनीकरण, विलेपन, जल का पूर्व उपचार तथा रासायनिक उपचार। हमारे विचार से रासायनिक उपचार अपेक्षतया सस्ता तथा सुकर है और इसका प्रभाव बाँयलर के अन्दर दीर्घकाल तक बना रहता है।

#### निर्देश

1. वेबर, जूनियर, डब्लू० जे०, Physico-Chemical Processes for Water Quality Control, Wiley Interscience New York (1972).
2. Water Pollution and Control, Environ. Sci. Techn. 1974, 8, 22.
3. डुगन, पी० आर०, Biochemical Ecology of Water Pollution, Plenum Press, New York (1972).
4. बर्ग, जी० सी०, Water Pollution, Institute of Public Information, New York (1970).
5. एलेन, एच० ई० तथा क्रैमर, जे० आर०, Pollutants in Natural Water, Wiley Interscience, New York (1972).

## लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हो और न आगे छापे जायें। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।
2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही मुष्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे  $(K_4FeCN)_6$  अथवा  $\alpha, \beta, \gamma^4$  इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।
7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लॉक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—  
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80।
9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, सहषि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएंगे।

प्रधान सम्पादक  
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor  
Swami Satya Prakash Saraswati

सम्पादक  
डॉ० चन्द्रिका प्रसाद  
डी० फिल०

Editor  
Dr. Chandrika Prasad

प्रबन्ध सम्पादक  
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,  
एम० एस-सी०, डी० फिल०

Managing Editor  
Dr. Sheo Gopal Misra,  
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य  
वार्षिक मूल्य : 30 रु० या 12 पौड या 40 डालर  
त्रैमासिक मूल्य : 8 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates  
Annual Rs. 30 or 12 £ or \$ 40  
Per Vol. Rs. 8 or 3 £ or \$ 10

Vijnana Parishad  
Maharshi Dayanand Marg  
Allahabad, 211002  
India

संकायन  
विज्ञान परिषद्,  
महर्षि दयानन्द मार्ग,  
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,  
7 बेली ऐवेन्यू,  
इलाहाबाद